DIE ZUSAMMENHÄNGENDE K- UND KO-THEORIE VON QUOTIENTEN VON REELLEN PROJEKTIVEN RÄUMEN

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Georg-August-Universität zu Göttingen

vorgelegt von
Bodo Roiko
aus Bad Bramstedt

Göttingen 1976

DIE ZUSAMMENHÄNGENDE K- UND KO-THEORIE VON QUOTIENTEN VON REELLEN PROJEKTIVEN RÄUMEN

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Georg-August-Universität zu Göttingen

vorgelegt von
Bodo Roiko
aus Bad Bramstedt

Göttingen 1976

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

D 7

Referent: Prof. Dr. R.M. Switzer
Korreferent: Prof. Dr. T. tom Dieck
Tag der mündlichen Prüfung: 4. 11. 1976

Inhaltsverzeichnis

	Seite
§1 Einleitung	1
§2 Methoden und Notation	8
§3 Beweis der Sätze 1 und 2	12
§4 Beweis der Sätze 3 und 4	22
Literaturverzeichnis	51

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41534921_0033

§1 Einleitung

Jedem Spektrum E ist nach Whitehead [16] eine verallgemeinerte Homologie - und Kohomologie - Theorie zugeordnet; diese werden mit E_* und E^* bezeichnet. Ist E ein Ringspektrum und X ein beliebiges Spektrum, so sind $E_*(X)$ und $E^*(X)$ in natürlicher Weise Moduln über dem Koeffizientenring $\pi_*(E)$. Wenn X das Suspensionsspektrum eines beliebigen Raumes ist, wird $E^*(X)$ eine $\pi_*(E)$ - Algebra.

Für das zusammenhängende BU - Spektrum bu und das zusammenhängende BO - Spektrum bo läßt sich eine solche Ringstruktur definieren, [3]. Die assoziierten Homologie - und Kohomologie - Theorien sind u.a. von Bedeutung für die Untersuchung komplexer Bordismen [4], stabiler Homotopiegruppen von Sphären und des Bildes des J - Homomorphismus [8]. Adams [3] zeigt, wie die Adams - Spektralsequenz für bu und bo zu handhaben ist, und berechnet $bu_*(bu)$.

In der vorliegenden Arbeit wird mit Methoden ähnlich denen von Adams [3] zunächst die Struktur der reduzierten bu - Kohomologie $\widetilde{bu}^*(RP^n/RP^m)$ und der reduzierten bu - Homologie $\widetilde{bu}_*(RP^n/RP^m)$ von Quotienten von reellen projektiven Räumen über $\pi_*(bu)$ bestimmt und dann das entsprechende Resultat für $\widetilde{bo}^*$ und $\widetilde{bo}_*$ bewiesen.

Die Koeffizientenringe sind bekannt, [3], [14]:
$\pi_*(bu)$ ist der ganzzahlige Polynomring $Z[t]$, wobei t das erzeugende Element von $\pi_2(bu)$ ist;
$\pi_*(bo)$ wird erzeugt von Elementen $\alpha \in \pi_1(bo)$, $\beta \in \pi_4(bo)$ und

$\gamma \in \pi_8(bo)$ mit den Relationen

$$2\alpha = \alpha^3 = \alpha\beta = 0 \ , \ \beta^2 = 4\gamma \ .$$

Es werden die folgenden Sätze bewiesen (Elemente mit nicht definiertem Index sind Null zu setzen):

Satz 1: Sei $X := RP^n / RP^m$, $0 \le m = 2l-l' < n = 2k+k'$ und l', $k' = 0,1$. Dann lassen sich Elemente

$$\begin{aligned} s_i &\in \widetilde{bu}^{2i}(X) \ , \quad l+1 \le i \le k \ , \\ \bar{s}_l &\in \widetilde{bu}^{2l}(X) \ , \quad \text{falls } l' = 1, \\ s_{k+1} &\in \widetilde{bu}^{2k+1}(X), \quad \text{falls } k' = 1 \end{aligned}$$

derart bestimmen, daß $\widetilde{bu}^*(X)$ als Algebra über $\pi_*(bu)$ erzeugt wird von

$$l'\bar{s}_l, \ s_{l+1}, \ \ldots \ , \ s_k, \ k's_{k+1}$$

mit den Relationen

(i) $2^{i+1}s_{k-i} = 0, \qquad 0 \le i \le k-l-1,$

$t^j s_{k-i} = 2^j s_{k-i-j}, \quad 0 \le i \le k-l-2, \ 1 \le j \le k-l-1-i;$

(ii) $s_i s_j = (-1)^{l+1} s_{i+j} \ , \ l+1 \le i,j \le k+1 \ ,$

(iii) $\bar{s}_l^2 = (-1)^{l-1} s_{2l} \ , \ s_i \bar{s}_l = (-1)^l s_{i+l}, \quad l+1 \le i \le k+1.$

Satz 2: Sei $X := RP^n / RP^m$, $0 \le m = 2l-l' < n = 2k+k'$ und l', $k' = 0,1$. Dann existieren Elemente

$$\begin{aligned} q_i &\in \widetilde{bu}_{2i+1}(X), \quad 1 \le i \le k-1 \ , \\ \bar{q}_l &\in \widetilde{bu}_{2l}(X) \ , \quad \text{falls } l' = 1, \\ q_k &\in \widetilde{bu}_{2k+1}(X), \quad \text{falls } k' = 1, \end{aligned}$$

so daß $\widetilde{bu}_*(X)$ ein $\pi_*(bu)$ - Modul mit den Erzeugenden

$$1'\bar{q}_1,\ q_1,\ \ldots,\ q_{k-1},\ k'q_k$$

und den Relationen

$$2^{i+1}q_{1+i} = 0, \qquad 0 \le i \le k-1-1\ ,$$
$$t^j\, q_{1+i} = 2^j q_{1+i+j}, \quad 0 \le i \le k-1-2,\ 1 \le j \le k-1-1-i,$$

ist.

Satz 3: Sei $X := RP^n / RP^m$, $m = 4c+c'$, $-1 \le c' \le 2$, und $n = 4d+d'$, $0 \le d' \le 3$. Dann gibt es Elemente

$$y_i \in \widetilde{bo}^{4i}(X)\ ,\quad c+1 \le i \le d,$$

und falls

$c' = -1$: $\bar{y}_c \in \widetilde{bo}^{4c}(X)$,

$c' = -1,0$: $y'_c \in \widetilde{bo}^{4c}(X)$,

$c' = 1$: $x_1 \in \widetilde{bo}^{4c+2}(X)$, $x_2 \in \widetilde{bo}^{4c}(X)$, $x_3 \in \widetilde{bo}^{4c-2}(X)$,

$d' = 0$: $v_4 \in \widetilde{bo}^{4d-2}(X)$,

$d' = 1$: $v_1 \in \widetilde{bo}^{4d+1}(X)$, $v_5 \in \widetilde{bo}^{4d-3}(X)$,

$d' = 2,3$: $v_2 \in \widetilde{bo}^{4d+2}(X)$,

$d' = 3$: $v_3 \in \widetilde{bo}^{4d+3}(X)$,

so daß folgende die $\pi_*(bo)$ - Algebra $\widetilde{bo}^*(X)$ erzeugen:

I. $0 \le m \le n-4$, $n \not\equiv 3 \bmod 4$ für $n-4 = m$:

Die Vereinigung der Elemente $y_{c+1}, y_{c+2}, \ldots, y_d$ mit den für die einzelnen Werte von c' und d' zusätzlich definierten Grössen; alle Relationen ergeben sich aus den folgenden, falls

(1) $c' = 2$: $\beta\, y_i = 8\, y_{i-1}$, $\gamma\, y_i = 2\beta\, y_{i-1}$,

$16\, y_{d-1} = \alpha\, y_i = 0$, $c+2 \le i \le d$,

$y_i\, y_j = -y_{i+j}$, $c+1 \le i,j \le d$;

$d' = 0$: $2\, y_d = 2\, v_4 = \beta\, v_4 = 0$, $\alpha^2\, v_4 = 8\, y_{d-1}$,

$v_4^2 = y_i\, v_4 = 0$, $c+1 \le i \le d$;

$d' = 1$: $\alpha\, v_1 = 2\, y_d$, $\beta\, v_1 = 2\, v_5$, $\alpha\, v_5 = 8\, y_{d-1}$,

$\beta\, v_5 = 2\gamma\, v_1$, $v_1\, v_5 = y_i\, v_1 = y_i\, v_5 = v_1^2 = v_5^2 = 0$,

$c+1 \le i \le d$;

$d' = 2,3$: $2\, v_2 = \beta\, v_2 = 0$, $\alpha^2\, v_2 = 4\, y_d$,

$y_i\, v_2 = v_2^2 = 0$, $c+1 \le i \le d$;

$d' = 3$: $y_i\, v_3 = v_3^2 = 0$, $c+1 \le i \le d$;

(2) $c' = 0$: den Relationen (1) und

$\alpha\, y_{c+1} = 0$, $\beta\, y_{c+1} = 4\, y'_c$, $\gamma\, y_{c+1} = \beta\, y'_c$,

$y'_c\, y_i = -2\, y_{c+i}$, $(y'_c)^2 = -4\, y_{2c}$, $c+1 \le i \le d$;

$d' = 3$ und $c = 0$: $y'_0\, v_2 = \alpha\, v_3$;

alle weiteren Produkte verschwinden;

(3) $c' = -1$: den Relationen (1) und (2) sowie

$\bar{y}_c^2 = -y_{2c}$, $\bar{y}_c\, y'_c = -2\, y_{2c}$, $\bar{y}_c\, y_i = -\, y_{c+i}$,

$c+1 \le i \le d$;

die möglichen Produkte für $d' = 0,1,2,3$ verschwinden;

(4) $c' = 1$: den Relationen (1) und

$\alpha\, y_{c+1} = 0$, $\beta\, y_{c+1} = 2\, x_2$, $2\gamma\, y_{c+1} = \beta\, x_2$,

$\alpha\, x_i = 0$, $i = 1,2,3$,

$\beta\, x_1 = 2\, x_3$, $\beta\, x_3 = 2\gamma\, x_1$,

$x_2^2 = -16\, y_{2c}$, $x_1^2 = x_3^2 = x_1\, x_2 = x_1\, x_3 = x_2\, x_3 = 0$,

$x_2\, y_i = -4\, y_{c+i}$, $x_1\, y_i = x_3\, y_i = 0$, $c+1 \le i \le d$;

alle weiteren Produkte verschwinden.

II. $m+2 = n$, $n > 1$:

(1) $n = 4d$: y_d, v_4 mit den Relationen

$$2\,y_d = 0,\quad \alpha^2\,y_d = 2\,v_4,\quad \beta\,y_d = \alpha^2\,v_4,$$
$$\beta\,v_4 = y_d\,v_4 = v_4^2 = y_d^2 = 0;$$

(2) $n = 4d+1$: v_1, $\bar{y}_d$ mit den Relationen $v_1\,\bar{y}_d = v_1^2 = y_d = 0$;

(3) $n = 4d+2$: v_2, y'_d mit den Relationen

$$2\,v_2 = 0,\quad \alpha^2\,v_2 = 2\,y'_d,\quad \beta\,v_2 = \alpha^2\,y'_d,$$
$$\beta\,y'_d = v_2\,y'_d = v_2^2 = (y'_d)^2 = 0,\ d > 0,\ (y'_0)^2 = -2y'_0\ ;$$

(4) $n = 4d+3$: v_2, v_3 mit den Relationen $v_2\,v_3 = v_2^2 = v_3^2 = 0$;

III. $m+3 = n$, $n > 2$:

(1) $n = 4d+2$: v_2, $\bar{y}_d$, y'_d mit den Relationen II,(3) und

$$\bar{y}_d\,v_2 = \bar{y}_d\,y'_d = 0;$$

(2) $n = 4d+3$: v_2, v_3, y'_d mit den Relationen II,(3) und

$$v_2\,v_3 = v_3\,y'_d = 0;$$

für $n = 4d$ gilt I,(4) und für $n = 4d+1$ I,(1);

IV. $m+4 = n = 4d+3$, $d > 0$:

v_2, v_3, $\bar{y}_d$, y'_d mit den Relationen III,(1),(2) und

$v_3\,\bar{y}_d = 0$.

Satz 4: Sei $X := RP^n / RP^m$, $m = 4c+c'$, $-1 \le c' \le 2$, und $n = 4d+d'$, $0 \le d' \le 3$. Dann existieren Elemente

$$r_i \in \widetilde{bo}_{4i-1}(X)\ ,\quad c+1 \le i \le d\ ,$$

und falls

$c' = -1,0$: $r'_c \in \widetilde{bo}_{4c+1}(X)$,

$c' = -1$: $\bar{r}_c \in \widetilde{bo}_{4c}(X)$,

$c' = 1$: $p_1 \in \widetilde{bo}_{4c+2}(X)$, $p_2 \in \widetilde{bo}_{4c+6}(X)$,

$c' = 2$: $p_3 \in \widetilde{bo}_{4c+5}(X)$,

$d' = 1$: $o_1 \in \widetilde{bo}_{4d+1}(X)$, $o_2 \in \widetilde{bo}_{4d+3}(X)$, $o_3 \in \widetilde{bo}_{4d+5}(X)$,

$d' = 2,3$: $o_4 \in \widetilde{bo}_{4d+3}(X)$,

$d' = 3$: $\bar{r}_{d+1} \in \widetilde{bo}_{4d+3}(X)$,

so daß folgende den $\pi_*(bo)$ - Modul $\widetilde{bo}_*(X)$ erzeugen:

I. $0 \leq m \leq n-4$, $n \not\equiv 3 \bmod 4$ für $n = m+4$:

Die Vereinigung der Elemente $r_{c+1}, r_{c+2}, \ldots, r_d$ mit den für die einzelnen Werte von c' und d' zusätzlich definierten Grössen; alle Relationen ergeben sich aus

$$16\, r_{c+2} = 0, \quad 8\, r_i = \beta\, r_{i-1}, \quad \gamma\, r_{i-1} = 2\beta\, r_i, \quad c+2 \leq i \leq d,$$

$$\alpha\, r_i = 0, \quad c+1 \leq i \leq d-1;$$

und zusätzlich für

$c' = -1,0$: $2\, r'_c = 0$, $\alpha^2\, r'_c = 4\, r_{c+1}$, $\beta\, r'_c = 0$;

$c' = 1$: $2\, r_{c+1} = \alpha\, p_1$, $\beta\, p_1 = 2\, p_2$, $\alpha\, p_2 = 8\, r_{c+2}$, $\beta\, p_3 = 2\gamma\, p_1$;

$c' = 2$: $2\, r_{c+1} = \alpha\, r_{c+1} = 2\, p_3 = 0$, $\alpha^2\, p_3 = 8\, r_{c+2}$;

$d' = 1$: $2\, o_2 = \beta\, r_d$, $\alpha\, r_d = \alpha\, o_i = 0$, $i = 1,2,3$, $\beta\, o_1 = 2\, o_3$, $\beta\, o_2 = 2\gamma\, r_d$, $\beta\, o_3 = 2\gamma\, o_1$;

$d' = 2,3$: $4\, o_4 = \beta\, r_d$, $\alpha\, r_d = 0$, $\beta\, o_4 = \gamma\, r_d$;

II. $m+2 = n$, $n > 1$:

(1) $n = 4d$: r_d, p_3 mit den Relationen

$$2\, r_d = 2\, p_3 = 0, \quad \beta\, r_d = \alpha^2\, p_3, \quad \beta\, p_3 = 0;$$

(2) $n = 4d+1$: $\bar{r}_d$, r'_d ;

(3) $n = 4d+2$: r'_d, o_4 mit den Relationen

$$2\, r'_d = 2\, o_4 = 0, \quad \beta\, r'_d = \alpha^2\, o_4, \quad \beta\, o_4 = 0;$$

(4) $n = 4d+3$: p_1, $\bar{r}_{d+1}$;

III. $m+3 = n$, $n > 2$:

(1) $n = 4d+2$: r'_d, o_4, $\bar{r}_d$ mit den Relationen II,(3);

(2) $n = 4d+3$: r'_d, o_4, $\bar{r}_{d+1}$ mit den Relationen II,(3);

für $n = 4d$, $4d+1$ gilt I;

IV. $m+4 = n = 4d+3$, $d > 0$:

$\bar{r}_d$, r'_d, o_4, $\bar{r}_{d+1}$ mit den Relationen II,(3).

Herrn Prof. Dr. R.M. Switzer danke ich für die Anregung dieser Arbeit und zahlreiche nützliche Diskussionen.

§2 Methoden und Notation

Der n - te Term bu_n des zusammenhängenden BU - Spektrums bu ist bekanntlich, siehe z.B. [4], der (n-1) - zusammenhängende Faserraum über dem n - ten Term des BU - Spektrums K, und die Strukturabbildungen

$$bu_n \longrightarrow \Omega\, bu_{n+1} \ , \ n \geq 0,$$

($\Omega\, bu_{n+1}$ ist der Schleifenraum von bu_{n+1}) ergeben sich aus dem Periodizitätssatz von Bott. Daher gibt es eine Abbildung

$$bu \longrightarrow K$$

von Spektren, die für $r \geq 0$ einen Isomorphismus zwischen den Homotopiegruppen $\pi_r(bu)$ und $\pi_r(K)$ induziert; für $r < 0$ verschwindet $\pi_r(bu)$.

Insbesondere stimmen also für einen Komplex X $bu^0(X)$ und $K^0(X)$ überein.

Die analogen Aussagen gelten für das Spektrum bo und das BO - Spektrum KO.

Da somit für E = bu,bo die Koeffizientengruppen $\pi_q(E) = \tilde{E}_q(S^0) = \tilde{E}^{-q}(S^0)$, $q \in Z$, bekannt sind, ist der Versuch naheliegend, $\tilde{E}^*(RP^n / RP^m)$ mit Hilfe der Atiyah - Hirzebruch - Spektralsequenz mit den E_2 - Termen

$$E_2^{pq} = \tilde{H}^p(RP^n / RP^m;\ \tilde{E}^q(S^0)) \ , \ p \geq 0,\ q \in Z,$$

zu berechnen. Die Differentiale

$$d_r : E_r^{pq} \longrightarrow E_r^{p+r,q-r+1}$$

verschwinden zwar trivialerweise für E = bu und lassen sich für E = bo mit Maunder [9] und Thomas [15] - vgl. auch Fujii [5] -

bestimmen, doch sind nicht alle bei der Berechnung von $\tilde{E}^*(RP^n/RP^m)$ auftretenden Erweiterungsprobleme zu lösen, da über die Operation von $\tilde{E}^*(S^0)$, insbesondere die Multiplikation mit 2, auf $\tilde{E}^*(RP^n/RP^m)$ zu wenig bekannt ist.

Diese Schwierigkeiten treten nicht auf bei der Verwendung der Adams - Spektralsequenz [1], [3], [11], [14], in folgender Form. Sei H das Eilenberg - MacLane Spektrum für die Gruppe Z_2 der Ordnung 2, A die Steenrod - Algebra $H^*(H)$ und A_* die zu A duale (Hopf) - Algebra $H_*(H)$. Dann konvergieren die Spektralsequenzen mit den E_2 - Termen

$$\mathrm{Ext}_A^{s,s-q}(H^*(E),\ \tilde{H}^*(RP^n/RP^m)),$$

$$\mathrm{Ext}_{A_*}^{s,s+q}(Z_2,\ \tilde{H}_*(E \wedge RP^n/RP^m))$$

gegen $\tilde{E}^q(RP^n/RP^m)$ bzw $\tilde{E}_q(RP^n/RP^m)$, da in beiden Fällen nur 2 - Torsion auftritt, wie sofort aus den entsprechenden Atiyah - - Hirzebruch - Spektralsequenzen folgt.

Die E_2 - Terme lassen sich nun folgendermaßen vereinfachen. Die Elemente Sq^1 und $Sq^{01} = Sq^3 + Sq^2Sq^1$ der Milnor - Basis von A - sie entsprechen den Basiselementen ξ_1 und ξ_2 von A_* - erzeugen eine äußere Hopf - Unteralgebra B von A. Somit ist die zu B duale Hopf - Algebra B_* der Quotient von A_* nach dem von $\xi_1^2, \xi_2^2, \xi_3, \ldots$ erzeugten Ideal, also eine äußere Algebra mit den beiden Erzeugenden ξ_1 und ξ_2 und der Comultiplikation

$$\phi_{B_*}(\xi_i) = 1 \otimes \xi_i + \xi_i \otimes 1, \quad i = 1,2.$$

Sei ferner A_1 die von $Sq^0 = 1$, Sq^1, Sq^2 erzeugte Hopf - Unteralgebra von A. Dann ist die zu A_1 duale Hopf - Algebra A_{1*} der Quotient des Polynomrings $Z_2[\xi_1, \xi_2]$ nach dem von ξ_1^4 und ξ_2^2

erzeugten Ideal, wobei die Comultiplikation $\phi_{A_{1*}}$ von A_{1*} von der in A_* definierten induziert wird.

Nach Adams [3] gilt:

Satz: Als A - Moduln sind $H^*(bu)$ und $A \otimes_B Z_2$ sowie $H^*(bo)$ und $A \otimes_{A_1} Z_2$ isomorph.

Damit ergeben sich durch "Ringwechsel" die natürlichen Isomorphien

$$Ext_A^{s,s-q}(H^*(bu), \tilde{H}^*(RP^n/RP^m)) \cong Ext_B^{s,s-q}(Z_2, \tilde{H}^*(RP^n/RP^m)),$$

$$Ext_A^{s,s-q}(H^*(bo), \tilde{H}^*(RP^n/RP^m)) \cong Ext_{A_1}^{s,s-q}(Z_2, \tilde{H}^*(RP^n/RP^m)),$$

und entsprechend für die Homologie

$$Ext_{A_*}^{s,s+q}(Z_2, \tilde{H}_*(bu \wedge RP^n/RP^m)) = Ext_{B_*}^{s,s+q}(Z_2, \tilde{H}_*(RP^n/RP^m)),$$

$$Ext_{A_*}^{s,s+q}(Z_2, \tilde{H}_*(bo \wedge RP^n/RP^m)) = Ext_{A_{1*}}^{s,s+q}(Z_2, \tilde{H}_*(RP^n/RP^m)).$$

In dieser Form sind die E_2 - Terme zu berechnen. Ferner lassen sich alle Differentiale und mit der Produktstruktur der Adams - - Spektralsequenz auch die Erweiterungen

$$0 \longrightarrow F^{s+1,s+q+1} \longrightarrow F^{s,s+q} \longrightarrow E_\infty^{s,s+q} \longrightarrow 0$$

($F^{s,s+q}$, $s \geq 0$, sind die Filtrierungsgruppen von $\tilde{E}^{-q}(RP^n/RP^m)$ bzw $\tilde{E}_q(RP^n/RP^m)$) bestimmen sowie die angegebenen Strukturen von $\tilde{E}^*(RP^n/RP^m)$ und $\tilde{E}_*(RP^n/RP^m)$ über $\pi_*(E)$ beweisen, siehe §§3,4.

Bei diesen Berechnungen wird folgende Notation verwandt.
Mit X bezeichnen wir den Quotienten RP^n/RP^m, mit M den Z_2 - Modul $\tilde{H}^*(X)$ mit der Basis $u^{m+1}, u^{m+2}, \ldots, u^n$, $u^i \in \tilde{H}^i(X)$, und mit N den zu M dualen Z_2 - Modul $\tilde{H}_*(X)$ mit der Basis $w_{m+1}, w_{m+2}, \ldots, w_n$, $w_i \in \tilde{H}_i(X)$, sowie mit ϕ_D die Cooperation eines Comoduls D über

einer Coalgebra C.

Für das Bild und den Kern von einem Modul - Homomorphismus h benutzen wir die Abkürzungen Im h und Ker h und 1 für den identischen Homomorphismus.

Nebenklassen werden mit [ ], die zyklische Gruppe der endlichen Ordnung k wird mit Z_k bezeichnet.

§3 Beweis der Sätze 1 und 2

Zunächst sind die E_2 - Terme $Ext_B^{s,s-q}(Z_2, M)$ zu bestimmen, die sich mittels einer B - freien Auflösung von Z_2 konstruieren lassen; diese ist bekannt, siehe z.B. Milnor [11].

Sei $Y_* := B \otimes Z_2[x,y]$, Grad x = 1, Grad y = 3, C_s der von allen Monomen $x^{s-i}y^i$, $0 \le i \le s$, erzeugte Z_2 - Modul, $Y_s := B \otimes C_s$ und

$$d : Y_s \longrightarrow Y_{s-1} , \quad 1 \le s,$$

der durch

$$d(x^{s-i}y^i) = Sq^1 x^{s-i-1}y^i + Sq^{01} x^{s-i}y^{i-1} , \quad 0 \le i \le s,$$

definierte B - Modul - Homomorphismus (dabei sind, wie auch im Folgenden, Größen mit nichtdefiniertem Exponent oder Index als Null zu interpretieren) sowie

$$e : B \longrightarrow Z_2$$

die Erweiterung von B.

Dann ist (Y_*, d, e) die gesuchte Auflösung.

Die Operation von B auf M wird gegeben durch

$$Sq^1 u^i = i\, u^{i+1} , \quad Sq^{01} u^i = i\, u^{i+3} , \quad m+1 \le i \le n.$$

Bezeichnet nun $x^{s-i}y^i u^{2i+q}$ den durch

$$x^{s-i}y^i \longrightarrow u^{2i+q} , \quad x^{s-j}y^j \longrightarrow 0, \quad i \neq j, \ 0 \le i,j \le s,$$

definierten und für $\max(m+1-q, 0) \le 2i \le \min(n-q, 2s)$ nichttrivialen Z_2-Homomorphismus

$$C_s \longrightarrow M$$

vom Grade q-s, so geht unter der natürlichen Isomorphie

$$\mathrm{Hom}_B^{s-q}(B \otimes C_s, M) \cong \mathrm{Hom}_{Z_2}^{s-q}(C_s, M)$$

das Differential Hom(d,1) über in das Differential

$$d' : \mathrm{Hom}_{Z_2}^{s-q}(C_s, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{Z_2}^{s-q}(C_{s+1}, M)$$

mit

$$d'(x^{s-i}y^i u^{2i+q}) = q(x^{s-i+1}y^i u^{2i+q+1} + x^{s-i}y^{i+1}u^{2i+q+3})$$

Für die E_2 - Terme folgt hieraus, wobei daran erinnert sei, daß $\mathrm{Ext}_B(Z_2,Z_2)$ isomorph zur Polynomalgebra $Z_2[\bar{x},\bar{y}]$ in den Unbestimmten $\bar{x} := [x] \in \mathrm{Ext}_B^{1,1}(Z_2,Z_2)$ und $\bar{y} := [y] \in \mathrm{Ext}_B^{1,3}(Z_2,Z_2)$ ist, siehe z.B. [3]:

Lemma 1: Sei $n = 2l-l'$, $n = 2k+k'$, $l',k' = 0,1$, und

$$r_i := [u^{2i}] \in \mathrm{Ext}_B^{0,-2i}(Z_2, M), \quad l+1 \le i \le k;$$

$$\bar{r}_l := [u^{2l}] \in \mathrm{Ext}_B^{0,-2l}(Z_2, M), \quad \text{falls } l' = 1;$$

$$r_{k+1} := [u^n] \in \mathrm{Ext}_B^{0,-n}(Z_2, M), \quad \text{falls } k' = 1.$$

Dann wird $\mathrm{Ext}_B(Z_2, M)$ als Algebra über $\mathrm{Ext}_B(Z_2,Z_2)$ erzeugt von

$$l'\bar{r}_l,\ r_{l+1},\ \ldots,\ r_k,\ k'r_{k+1};$$

diese Elemente genügen den Relationen

(i) $\bar{x}^{i+1}r_{k-i} = 0, \quad 0 \le i \le k-l-1,$

$$\bar{y}^j r_{k-i} = \bar{x}^j r_{k-i-j}, \quad 0 \le i \le k-l-2,\ 1 \le j \le k-l-i-1;$$

(ii) $r_i r_j = r_{i+j}, \quad l+1 \le i,j \le k+1;\ \bar{r}_l^2 = r_{2l};$

$$\bar{r}_l r_i = r_{l+i}, \quad l+1 \le i \le k+1.$$

Beweis: Die Erzeugendensysteme und die Relationen (i) erhält man sofort aus der Berechnung der Kohomologie des obigen Kokettenkomplexes, die Relationen (ii) aus dem Cup - Produkt in M.

Bemerkung 1: Die kanonische Projektion p induziert

(i) einen injektiven Homomorphismus, $1 \leq i \leq 2l$,

$$p^*: \mathrm{Ext}_B(Z_2, \tilde{H}^*(RP^n/\ RP^{2l})) \longrightarrow \mathrm{Ext}_B(Z_2, \tilde{H}^*(RP^n/\ RP^{2l-i}));$$

(ii) für $q \geq 2l+2$, $s \geq 0$ einen Isomorphismus und für $q \leq 2l$, $s \geq 0$ einen surjektiven Homomorphismus

$$p^*: \mathrm{Ext}_B^{s,s-q}(Z_2, \tilde{H}^*(RP^n/\ RP^{2l-1})) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \mathrm{Ext}_B^{s,s-q}(Z_2, \tilde{H}^*(RP^n/\ RP^{2l-2})).$$

Lemma 2: Es verschwinden alle Differentiale in dieser Spektralsequenz.

Beweis: Sei zunächst $n = 2k+1$. Mit der Relation $\bar{x}r_k = 0$ folgt, da die Differentiale

$$d_r : E_r^{s,t} \longrightarrow E_r^{s+r,t+r-1}, \quad r \geq 2,$$

Derivationen sind und $d_r(\bar{x}) = 0$ für alle r gilt:

$$d_r(r_k) = 0, \ r \geq 2,$$

und somit

$$E_r^{s,s-2k-1} \neq 0, \ s \geq 0.$$

Die Injektivität der Multiplikation mit $\bar{y}$ liefert

$$E_r^{s+1,s-2k+2} \neq 0, \ s \geq 0;$$

folglich müssen alle Differentiale identisch Null sein.

Für $n = 2k$ ist die Aussage trivialerweise richtig.

Somit stimmen die E_∞ - Terme mit den E_2 - Termen überein, und es sind noch die Erweiterungen

$$0 \longrightarrow F^{s+1,s+1-q} \longrightarrow F^{s,s-q} \longrightarrow E_\infty^{s,s-q} \longrightarrow 0$$

$F^{s,s-q} \subset \tilde{bu}^q(X)$, zu bestimmen.

Nach Adams [3] gilt:

Lemma 3: (i) Es gibt einen Homomorphismus $E_r^{s,t} \longrightarrow E_r^{s+1,t+1}$, der für $r = 2$ von der Multiplikation mit $\bar{x}$ und für $r = \infty$ von der Multiplikation mit 2 in $\widetilde{bu}^*(X)$ durch Übergang zu Quotienten induziert wird.

(ii) Es gibt einen Homomorphismus $E_r^{s,t} \longrightarrow E_r^{s+1,t+3}$, der für $r = 2$ von der Multiplikation mit $\bar{y}$ und für $r = \infty$ von der Multiplikation mit dem erzeugenden Element $t \in \widetilde{bu}^{-2}(S^0)$ in $\widetilde{bu}^*(X)$ durch Übergang zu Quotienten induziert wird.

Hieraus folgt mit Lemma 1:

$$\begin{aligned}
&\widetilde{bu}^{2i+1}(RP^{2k+1}/\,RP^{m}) &&= Z\,, && i \le k;\\
&\widetilde{bu}^{2i}\ \ (RP^{2k+k'}/\,RP^{2l+1'}) &&= Z_{2^{k-i+1}}, && l+1 \le i \le k;\\
&\widetilde{bu}^{2i}\ \ (RP^{n}/\,RP^{2l}) &&= Z_{2^{k-l}}, && i \le l;\\
&\widetilde{bu}^{2i}\ \ (RP^{n}/\,RP^{2l-1}) &&= Z \oplus Z_{2^{k-1}}, && i \le l;
\end{aligned}$$

und die Multiplikation mit t induziert Isomorphismen

$$\begin{aligned}
&t : \widetilde{bu}^{2(l-i)}(X) \longrightarrow \widetilde{bu}^{2(l-i-1)}(X), && 0 \le i,\\
&t : \widetilde{bu}^{2(i+1)}(X) \longrightarrow 2\widetilde{bu}^{2i}(X), && l+1 \le i \le k-1,\\
&t : \widetilde{bu}^{2(l+1)}(X) \longrightarrow \mathrm{Tor}(\widetilde{bu}^{2l}(X)),
\end{aligned}$$

wobei Tor( ) den Torsionsanteil bezeichnet.

Bemerkung 2: Die Bemerkung 1 impliziert:

(i) Die kanonische Projektion p induziert eine Isomorphie zwischen $\widetilde{bu}^*(RP^n/\,RP^{2l})$ und einer Unteralgebra von $\widetilde{bu}^*(RP^n/\,RP^{2l-i})$, $1 \le i \le 2l$;

(ii) Für $q \geq 2l+2$ ist

$$p^* : \widetilde{bu}^q(RP^n / RP^{2l-1}) \longrightarrow \widetilde{bu}^q(RP^n / RP^{2l-2})$$

bijektiv und für $q \leq 2l$ surjektiv.

Um die in Satz 1 angegebene Struktur zu bestimmen, können wir wegen der Gleichheit von $\widetilde{bu}^0(X)$ und $\widetilde{K}^0(X)$ folgendes Resultat von Adams [2] verwenden.

Sei ξ das kanonische Geradenbündel über RP^n, c die "Komplexifizierung" $\widetilde{KO}^0(RP^n) \longrightarrow \widetilde{K}^0(RP^n)$, $\lambda = \xi - 1 \in \widetilde{KO}^0(RP^n)$ und $\nu = c\lambda$. Dann gilt:

1) $\widetilde{K}^0(RP^{2k+k'}) = Z_{2^k}$, $k' = 0,1$, läßt sich durch das erzeugende Element ν und die beiden Relationen

$$\nu^2 = -2\nu, \quad \nu^{k+1} = 0$$

beschreiben.

2) Die kanonische Projektion p induziert einen Isomorphismus zwischen $\widetilde{K}^0(RP^{2k+k'} / RP^{2l})$ und der von ν^{l+1} erzeugten Untergruppe von $\widetilde{K}^0(RP^{2k+k'})$.

3) Für $n = 2l-1$ gilt: $\widetilde{K}^0(RP^{2k+k'} / RP^{2l-1}) = Z \oplus \widetilde{K}^0(RP^{2k+k'} / RP^{2l})$; der zweite Summand wird durch die Projektion eingebettet und das erzeugende Element $\bar{\nu}^{(l)}$ des ersten erfüllt $p^*(\bar{\nu}^{(l)}) = \nu^l \in \widetilde{K}^0(RP^{2k+k'})$.

Setzen wir nun $\nu^{(l+1)} := (p^*)^{-1} \nu^{l+1}$, so ergeben sich unmittelbar die Gleichungen

$$
\begin{aligned}
& \nu^{(l+1)}\,\nu^{(l+1)} = (-2)^{l+1}\,\nu^{(l+1)}\,, \\
(*) \qquad & p^*(\nu^{(l+1)}) = -2\,\nu^{(l)}, \\
& p^*(\bar{\nu}^{(l)}) = \nu^{(l)};
\end{aligned}
$$

p bezeichnet hierbei die jeweilige Projektion.

Definieren wir deshalb

$$
\begin{aligned}
s_{l+1} &:= (t^{l+1})^{-1}\,(\nu^{(l+1)})\,, \\
s_{i+1} &:= t^{-1}\,(2s_i), \qquad l+1 \le i \le k-1, \\
\bar{s}_l &:= (t^l)^{-1}\,(\bar{\nu}^{(l)}), \quad \text{falls } m = 2l-1
\end{aligned}
$$

und wählen, falls $n = 2k+1$, ein erzeugendes Element s_{k+1} von $\widetilde{bu}^{2k+1}(X) = Z$, so ist offenbar

$$1'\bar{s}_l, s_{l+1}, \ldots, s_k, k's_{k+1}$$

ein Erzeugendensystem von $\widetilde{bu}^*(X)$ als $\widetilde{bu}^*(S^0)$ - Modul, das den Relationen (i) genügt. Weiter gilt für $l+1 \le i \le k$

$$(**) \qquad t^i s_i = 2^{i-l-1}\,\nu^{(l+1)}.$$

Hieraus folgen mit (*) und den obigen Isomorphien sofort die Relationen (ii), (iii) und somit Satz 1.

Die zum Beweis von Satz 2 zunächst zu berechnenden E_2 - Terme $Ext_{B_*}^{s,s+q}(Z_2, N)$ lassen sich bekanntlich mit Hilfe einer Auflösung von N durch erweiterte B_* - Comoduln konstruieren. Hierzu ist die Cooperation

$$\phi_N : N \longrightarrow B_* \otimes N$$

zu bestimmen. Diese wird gegeben durch

$$\phi_N(w_{2i}) = 1 \otimes w_{2i} + \xi_1 \otimes w_{2i-1} + \xi_2 \otimes w_{2i-3}, \quad m+1 \leq 2i \leq n,$$
$$\phi_N(w_{2i+1}) = 1 \otimes w_{2i+1}, \quad m+1 \leq 2i+1 \leq n$$

wie man leicht mit der oben beschriebenen Operation von B auf M und folgender Formel - siehe z.B. Switzer [14] verifiziert.

Lemma 4: Sei $a \in A = H^*(H)$, $u^i \in \tilde{H}^i(X)$, $w_j \in \tilde{H}_j(X)$ und

$$\phi_N(w_j) = \sum_l b_l^j \otimes w_l$$

Dann gilt

$$\langle au^i, w_j \rangle = \sum_l \langle a, b_l^j \rangle \langle u^i, w_l \rangle = \langle a, b_l^j \rangle,$$

wobei $\langle , \rangle$ das Kronecker - Produkt bedeutet.

Somit ergibt sich die kurze exakte Sequenz von B_* - Comoduln - $P(N)$ ist der Untermodul der primitiven Elemente von N -

$$0 \longrightarrow P(N) \longrightarrow N \longrightarrow N/P(N) \longrightarrow 0$$

und $Q := N/P(N)$ ist ebenfalls primitiv erzeugt; die Elemente von Q werden wieder mit w_{2i}, $m+2 \leq 2i \leq n$, bezeichnet. Eine Auflösung von N läßt sich deshalb wie folgt konstruieren: Seien (Y'_*, d', e') bzw (Y''_*, d'', e'') Auflösungen von $P(N)$ bzw Q durch erweiterte B_* - Comoduln,

$$f_s : Y''_s \longrightarrow Y'_{s+1}$$

B_* - Comodul - Homomorphismen mit der Eigenschaft

$$(1) \qquad d' f_s + f_{s+1} d'' = 0 , \quad 0 \leq s,$$

und

$$f : Q \longrightarrow Y'_0$$

ein Homomorphismus, der

$$(2) \qquad d' f + f_0 e'' = 0$$

erfüllt. Definiert man nun

$$Y_s := Y'_s \otimes Y''_s , \qquad d := \begin{pmatrix} d' & f_s \\ 0 & d'' \end{pmatrix}$$

so folgt leicht mit (1) und (2):

(Y_*, d, Φ_N) ist die gesuchte Auflösung von N.

Die Auflösungen für P(N) und Q erhält man aus einer Auflösung $(L_*, \bar{d}, e)$ von Z_2, indem man mit P(N) bzw Q tensoriert. Diese Auflösung ist bekannt, siehe z.B. Switzer [14]:

$L_* := B_* \otimes Z_2[x,y]$, $L_s := B_* \otimes C_s$, x, y, C_s wie oben;

$\bar{d} : L_s \longrightarrow L_{s+1}$ sei eine Derivation mit $\bar{d}(\xi_1) = x$, $\bar{d}(\xi_2) = y$, $\bar{d}(x) = \bar{d}(y) = 0$ und $e : Z_2 \longrightarrow B_*$ die Erweiterung der Coalgebra B_*.

Definiert man die Abbildungen f und f_s durch, $b \in B_*$,

$$f_s(b x^{s-i} y^i w_{2j}) = b x^{s-i+1} y^i w_{2j-1} + b x^{s-i} y^{i+1} w_{2j-3}, \quad m+2 \leq 2j \leq n,$$

$$f(w_{2j}) = \xi_1 w_{2j-1} + \xi_2 w_{2j-3} ,$$

so zeigen einfache Rechnungen die oben geforderten Eigenschaften. Es ergibt sich somit folgende Auflösung $(Y_* = B_* \otimes Z_2[x,y] \otimes N, d, \Phi_N)$ von N durch erweiterte B_* - Comoduln:

$$Y_s := B_* \otimes C_s \otimes N ,$$

$$d : Y_s \longrightarrow Y_{s+1} , \quad s \geq 0,$$

wird gegeben durch

$$d\,(bx^{s-i}y^i w_j) = \bar{d}\,(bx^{s-i}y^i)w_j + (j-1)\,(bx^{s-i+1}y^i w_{j-1} + bx^{s-i}y^{i+1}w_{j-3}),$$

und Φ_N ist die Cooperation

$$\Phi_N : N \longrightarrow Y_o = B_* \otimes N .$$

Die natürliche Isomorphie

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}^*_{B_*}(Z_2,\ B_* \otimes Z_2[x,y] \otimes N) &\cong \mathrm{Hom}^*_{Z_2}(Z_2,\ Z_2[x,y] \otimes N) \\ &\cong Z_2[x,y] \otimes N \end{aligned}$$

führt das Differential Hom(1,d) über in die Beschränkung von d auf $Z_2[x,y] \otimes N$. Die Berechnung der Kohomologie dieses Kokettenkomplexes liefert sofort das

<u>Lemma 5</u>: Sei $m = 2l-l'$, $n = 2k+k'$, $l',k' = 0,1$, und

$$p_i := [w_{2i+1}] \in \mathrm{Ext}^{0,2i+1}_{B_*}(Z_2,\ N), \quad 1 \leq i \leq k-1,$$

$$p_k := [w_{2k+1}] \in \mathrm{Ext}^{0,2k+1}_{B_*}(Z_2,\ N), \quad \text{falls } k' = 1,$$

$$\bar{p}_l := [w_{2l}] \in \mathrm{Ext}^{0,2l}_{B_*}(Z_2,\ N), \quad \text{falls } l' = 1.$$

Dann wird $\mathrm{Ext}_{B_*}(Z_2,\ N)$ als Modul über $\mathrm{Ext}_{B_*}(Z_2,Z_2) = \mathrm{Ext}_B(Z_2,Z_2)$ erzeugt von

$$l'\bar{p}_l,\ p_l,\ p_{l+1},\ \cdots,\ p_{k-1},\ k'p_k$$

mit den Relationen

$$\bar{x}^{i+1}\ p_{l+i} = 0, \quad 0 \leq i \leq k-l-1 ,$$

$$\bar{y}^j\ p_{l+i} = \bar{x}^j\ p_{l+i+j},\ 0 \leq i \leq k-l-2,\ 1 \leq j \leq k-l-1-j.$$

Analog zu Lemma 2 folgt

Lemma 6: Alle Differentiale verschwinden.

Ausgehend von einem beliebigen Erzeugenden q_{k-1} von $\widetilde{bu}_{2k-1}(X)$ erhält man mit dem Analogon von Lemma 3 für die Homologie wie bei $\widetilde{bu}^*(X)$ die Elemente $q_1, \ldots, q_{k-2}$ und die angegebenen Relationen; für $m = 2l-1$ und $n = 2k+1$ wähle man einen beliebigen Erzeugenden $\bar{p}_l$ von $\widetilde{bu}_{2l}(X)$ bzw p_k von $\widetilde{bu}_{2k+1}(X)$.

Damit ist Satz 2 bewiesen.

§4 Beweis der Sätze 3 und 4

Nach §2 haben die E_2 - Terme $E_2^{s,s-q}$ der gegen $\widetilde{bo}^q(X)$ konvergenten Adams - Spektralsequenz die Form $Ext_{A_1}^{s,s-q}(Z_2, M)$. Diese werden mittels einer A_1 - freien Auflösung von Z_2 berechnet.
Liulevicius [6] zeigt, daß (Y_*, d, e) mit $Y_* := A_1 \otimes Z_2[a_1, a_2, a_3]$, Grad $a_i = i$, $i = 1,2,3$, $Y_s := A_1 \otimes C_s$, wobei C_s der von allen Monomen $a_1^{s-i-k}a_2^i a_3^k$, $0 \le k \le s$, $0 \le i \le s-k$, erzeugte Z_2 - Modul ist, dem durch

$$d_{s-1}(a_1^{s-i-k}a_2^i a_3^k) = Sq^1 a_1^{s-i-k-1}a_2^i a_3^k + Sq^{01} a_1^{s-i-k}a_2^{i}a_3^{k-1}$$
$$+ Sq^2 a_1^{s-i-k}a_2^{i-1}a_3^k + (k+1)\, a_1^{s-i-k-1}a_2^{i-1}a_3^{k+1}$$
$$+ (k+1)\, Sq^1 a_1^{s-i-k}a_2^{i-2}a_3^{k+1} + \binom{k+2}{2} a_1^{s-i-k}a_2^{i-3}a_3^{k+2}$$

definierten A_1 - Modul - Homomorphismus

$$d_{s-1} : Y_s \longrightarrow Y_{s-1}$$

und der Erweiterung

$$e : A_1 \longrightarrow Z_2$$

eine A_1 - freie Auflösung von Z_2 ist.
Die Operation von A_1 auf M ergibt sich aus der Formel

$$Sq^i u^j = \binom{j}{i} u^{i+j}.$$

Bezeichnet nun $a_1^{s-i-k}a_2^i a_3^k u^{i+2k+q}$ den durch

$$a_1^{s-i-k}a_2^i a_3^k \longrightarrow u^{i+2k+q}, \quad a_1^{s-j-l}a_2^j a_3^l \longrightarrow 0, \quad j \neq i, k \neq l,$$

definierten und für $\max(m+1-q, 0) \le i+2k \le \min(n-q, 2s)$, $i \le s$, nichttrivialen Z_2 - Homomorphismus

$$C_s \longrightarrow M$$

vom Grade q-s, so wird durch "Ringwechsel" aus dem Differential $\mathrm{Hom}(d_s,1)$ das Differential

$$g_s : \mathrm{Hom}_{Z_2}^{s-q}(C_s, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{Z_2}^{s-q}(C_{s+1}, M)$$

mit

$$\begin{aligned} g_s(a_1^{s-i-k}a_2^i a_3^k u^{i+2k+q}) &= (i+q)\, a_1^{s-i-k+1}a_2^i a_3^k u^{i+2k+q+1} \\ &+ (i+q)\, a_1^{s-i-k}a_2^i a_3^{k+1} u^{i+2k+q+3} + \binom{i+2k+q}{2} a_1^{s-i-k}a_2^{i+1}a_3^k u^{i+2k+q+2} \\ &+ k\, a_1^{s-i-k+1}a_2^{i+1}a_3^{k-1} u^{i+2k+q} + k(i+q)\, a_1^{s-i-k}a_2^{i+2}a_3^{k-1} u^{i+2k+q+1} \\ &+ \binom{k}{2} a_1^{s-i-k}a_2^{i+3}a_3^{k-2} u^{i+2k+q} \end{aligned}$$

Die Kohomologie dieses Kokettenkomplexes liefert also die E_2 - Terme $\mathrm{Ext}_{A_1}(Z_2, M)$. Zur Formulierung des Ergebnisses benötigen wir folgendes Resultat von Liulevicius [6]:

Definiert man in $\mathrm{Ext}_{A_1}(Z_2,Z_2)$ die Klassen

$$q_1 := [a_1], \quad q_2 := [a_2], \quad q_3 := [a_1a_3^2 + a_2^2a_3], \quad q_4 := [a_3^4],$$

so gilt:

Lemma 1: $\mathrm{Ext}_{A_1}(Z_2,Z_2)$ ist ein freier $Z_2[q_4]$ - Modul mit den Erzeugenden

$$q_1^n, \quad q_1^n q_3, \quad q_2, \quad q_2^2, \quad n \geq 0;$$

alle Relationen ergeben sich aus den folgenden

$$q_2q_3 = q_2^3 = q_1q_2 = 0, \quad q_3^2 = q_1^2q_4.$$

Setzt man $m = 4c+c'$, $-1 \leq c' \leq 2$, $n = 4d+d'$, $0 \leq d' \leq 3$, und definiert in $\mathrm{Ext}_{A_1}(Z_2, M)$ die Klassen

$$h_i := \left[u^{4i}\right] \in \mathrm{Ext}_{A_1}^{0,-4i}(Z_2, M), \quad c+1 \le i \le d,$$

und falls

$c' = -1$: $\bar{h}_c := \left[u^{4c}\right] \in \mathrm{Ext}_{A_1}^{0,-4c}(Z_2, M)$,

$c' = -1,0$: $h'_c := \left[a_2 u^{4c+1} + a_3 u^{4c+2}\right] \in \mathrm{Ext}_{A_1}^{1,1-4c}(Z_2, M)$,

$c' = 1$: $g_1 := \left[a_1 u^{4c+2} + a_3 u^{4c+4}\right] \in \mathrm{Ext}_{A_1}^{1,-4c-1}(Z_2, M)$,

$$g_2 := \left[a_2^2 u^{4c+2} + a_3^2 u^{4c+4}\right] \in \mathrm{Ext}_{A_1}^{2,2-4c}(Z_2, M),$$

$$g_3 := \left[a_1 a_3^2 u^{4c+2} + a_2^2 a_3 u^{4c+2} + a_3^3 u^{4c+4}\right] \in \mathrm{Ext}_{A_1}^{3,5-4c}(Z_2, M)$$

sowie falls

$d' = 0$: $f_4 := \left[a_2 u^{4d-1} + a_3 u^{4d}\right] \in \mathrm{Ext}_{A_1}^{1,3-4d}(Z_2, M)$,

$d' = 1$: $f_1 := \left[u^{4d+1}\right] \in \mathrm{Ext}_{A_1}^{0,-4d-1}(Z_2, M)$,

$$f_5 := \left[a_2^2 u^{4d-1} + a_2 a_3 u^{4d} + a_3^2 u^{4d+1}\right] \in \mathrm{Ext}_{A_1}^{2,5-4d}(Z_2, M),$$

$d' = 2,3$: $f_2 := \left[u^{4d+2}\right] \in \mathrm{Ext}_{A_1}^{0,-4d-2}(Z_2, M)$,

$d' = 3$: $f_3 := \left[u^{4d+3}\right] \in \mathrm{Ext}_{A_1}^{0,-4d-3}(Z_2, M)$

und bezeichnet mit $V_{c'}^{d'}$ die Vereinigung der $h_{c+1}, \ldots, h_d$ mit den für die einzelnen Werte von c' und d' zusätzlich definierten Klassen, so gilt:

Lemma 2: $V_{c'}^{d'}$ ist ein Erzeugendensystem von $\mathrm{Ext}_{A_1}(Z_2, M)$ als $\mathrm{Ext}_{A_1}(Z_2, Z_2)$ - Algebra; alle Relationen folgen aus, $0 \le m \le n-5$,

1) falls $c' = 2$: $q_1^4 h_{d-1} = q_2 h_i = 0$, $q_3 h_i = q_1^3 h_{i-1}$,

$$q_4 h_i = q_1 q_3 h_{i-1}, \quad c+2 \le i \le d;$$

$$h_i h_j = h_{i+j}, \quad c+1 \le i,j \le d;$$

und $d' = 0$: $q_1 h_d = q_1 f_4 = q_3 f_4 = 0$, $q_2^2 f_4 = q_1^3 h_{d-1}$,
$f_4^2 = h_i f_4 = 0$, $c+1 \le i \le d$;

$d' = 1$: $q_2 f_1 = q_1 h_d$, $q_2 f_5 = q_1^3 h_{d-1}$, $q_3 f_1 = q_1 f_5$,
$q_3 f_5 = q_1 q_4 f_5$;
$f_1^2 = f_5^2 = h_i f_1 = h_i f_5 = f_1 f_5 = 0$, $c+1 \le i \le d$;

$d' = 2$: $q_1 f_2 = q_3 f_2 = 0$, $q_2^2 f_2 = q_1^2 h_d$;
$f_2^2 = h_i f_2 = 0$, $c+1 \le i \le d$;

$d' = 3$: neben den Relationen für $d' = 2$ gelten noch
$f_3^2 = f_2 f_3 = h_i f_3 = 0$, $c+1 \le i \le d$;

2) <u>falls $c' = 0$</u>, so kommen zu den unter 1) aufgeführten Relationen hinzu:

$$q_2 h_{c+1} = 0, \quad q_3 h_{c+1} = q_1^2 h'_c, \quad q_4 h_{c+1} = q_3 h'_c$$
$$(h'_c)^2 = q_1^2 h_{2c}, \quad h'_c h_i = q_1 h_{c+i}, \quad c+1 \le i \le d$$

und für $d' = 3$ und $c = 0$

$$h'_0 f_2 = q_2 f_3;$$

alle weiteren Produkte verschwinden;

3) <u>falls $c' = -1$</u>, so gelten zusätzlich zu den Relationen 1) und 2)

$$\bar{h}_c^2 = h_{2c}, \quad \bar{h}_c h'_c = q_1 h_{2c}, \quad \bar{h}_c h_i = h_{c+i},$$

die möglichen Produkte für $d' = 0,1,2,3$ verschwinden;

4) <u>falls $c' = 1$</u>, so gelten neben den Relationen 1)

$$q_2 h_{c+1} = 0, \quad q_3 h_{c+1} = q_1 g_2,$$
$$q_1 q_4 h_{c+1} = q_3 g_2, \quad q_2 g_i = 0, \ i = 1,2,3,$$
$$q_3 g_1 = q_1 g_3, \quad q_3 g_3 = q_1 q_4 g_1,$$
$$g_2^2 = q_1^4 h_{2c}, \ g_1 g_2 = g_2 g_3 = g_1 g_3 = g_1^2 = g_3^2 = 0,$$
$$g_2 h_i = q_1^2 h_{c+i}, \ g_1 h_i = g_3 h_i = 0, \ c+1 \le i \le d;$$

die Produkte für die einzelnen Werte von d' verschwinden.

Für $n = m+2,\ m \geq 0$, gilt:

$V_0^2 = \{f_2,\ h_d'\}$ mit den Relationen

$q_1 f_2 = 0,\ q_2^2 f_2 = q_1 h_d',\ q_3 f_2 = q_2^2 h_d'$,

$q_3 h_d' = 0,\ \ f_2 h_d' = f_2^2 = (h_d')^2 = 0,\ d > 0,\ (h_0')^2 = q_1 h_0'$;

$V_2^0 = \{h_d,\ f_4\}$ mit den Relationen

$q_1 h_d = 0,\ q_2^2 h_d = q_1 f_4,\ q_3 h_d = q_2^2 f_4$,

$q_3 f_4 = 0,\ h_d f_4 = f_4^2 = h_d^2 = 0;$

$V_1^3 = \{f_2,, f_3\}$ mit den Relationen $f_2 f_3 = f_2^2 = f_3^2 = 0;$

$V_{-1}^1 = \{f_1,\ \bar{h}_d\}$ mit den Relationen $f_1 \bar{h}_d = f_1^2 = \bar{h}_d^2 = 0.$

Für $n = m+3,\ m \geq 0$, gilt:

$V_0^3 = \{f_2,\ f_3,\ h_d'\}$, $\quad V_{-1}^2 = \{f_2,\ \bar{h}_d,\ h_d'\}$,

und diese Elemente genügen neben den Relationen für V_0^2

$f_2 f_3 = f_3 h_d' = 0 \quad$ bzw $\quad \bar{h}_d f_2 = \bar{h}_d h_d' = 0.$

Für $n = m+4 = 4d+3,\ d \geq 1$, gilt:

$V_{-1}^3 = \{f_2,\ f_3,\ h_d,\ h_d'\}$,

und zu den für V_0^3 und V_{-1}^2 gültigen Relationen kommt hinzu

$\bar{h}_d f_3 = 0.$

In den anderen Fällen gelten die Relationen 1),..,4).

Beweis: Zunächst zeigen wir:

(*) Die Multiplikation mit q_4 induziert für $q \leq n$ und $q \neq m+5, m+9$, falls m ungerade ist, einen Isomorphismus

$$q_4 : E_2^{s,s-q} \longrightarrow E_2^{s+4,s+12-q}, \quad s \geq 1.$$

Beweis von (*).

Die Abbildung ist offensichtlich injektiv und für $q \leq m+1$ auch surjektiv.

Sei deshalb $m+2 \leq q \leq n$, $q \neq m+5$, $m+9$, falls m ungerade ist, $e \in \operatorname{Ker} g_{s+4}$ und $[e] \neq 0$. Dann hat e die Form

$$e = \sum_{i=1}^{p} e_i$$

mit

$$e_i = a_1^{s+4-j_i-k_i} a_2^{j_i} a_3^{k_i} u^{j_i+2k_i+q-8}$$

und $\max(m+9-q,0) \leq j_i+2k_i \leq \min(n+8-q,2s+8)$. Zu jedem e_i mit $0 \leq k_i \leq 3$ existiert, wie man leicht verifiziert, im Bild von g_{s+3} ein Element

$$e' = e_i + \sum_{l=1}^{p'} a_1^{s+4-j_l-k_l} a_2^{j_l} a_3^{k_l} u^{j_l+2k_l+q-8}$$

mit $k_l > k_i$, $1 \leq l \leq i$. Also hat jede Klasse in $E_2^{s+4,s+12-q}$ einen Repräsentanten der Form $a_3^4 \bar{e}$ mit $\bar{e} \in \operatorname{Ker} g_s$; somit folgt (*).

Für $m = 4c-1$ und $q = 4c+8, 4c+4$ liegen die Elemente $a_1^{s+4} u^{4c}$ und $a_1^{s+2} a_3^2 u^{4c} + a_1^{s+1} a_2^2 a_3 u^{4c}$ im Kern von g_{s+4}, aber nicht im Bild von g_{s+3}; für jede von $q_1^{s+4} \bar{h}_c$ in $E_2^{s+4,s+4-4c}$ und $q_1^{s+1} q_3 \bar{h}_c$ in $E_2^{s+4,s+8-4c}$ verschiedene Klasse läßt sich wie oben ein Urbild konstruieren.

Die analoge Aussage gilt für $m = 4c+1$, $q = 4c+10$, $4c+6$ und $q_1^{s+3} g_1$ in $E_2^{s+4,s+2-4c}$ bzw $q_1^{s+1} g_3$ in $E_2^{s+4,s+6-4c}$.

Daher sind nur die E_2 - Terme $E_2^{s,s-q}$ für $0 \le s$ und $n-7 \le q \le n$ sowie für $0 \le s \le 4$ und $q \le n-8$ zu bestimmen.

Eine Basis I_s des Bildes von g_{s-1} und eine Basis K_s des Kerns von g_s sind für

<u>$m = 4c+2$, $n = 4d$</u> und

$q = n$: $K_0 = \{u^n\}$,

$I_s = K_s = \{a_1^s u^n\}$, $s \ge 1$,

$q = n-1$: $I_s = K_s = \{a_1^{s-1} a_2 u^n\}$, $s \ge 1$,

$q = n-2$: $I_1 = \{a_1 u^{n-2} + a_3 u^n\}$, $K_1 = I_1 \cup \{a_2 u^{n-1} + a_3 u^n\}$

$I_s = K_s = a_1^{s-1} K_1 \cup \{a_1^{s-2} a_2^2 u^n\}$, $s \ge 2$,

$q = n-3$: $I_2 = \{a_1 a_2 u^{n-2} + a_2 a_3 u^n\}$, $K_2 = I_2 \cup \{a_2^2 u^{n-1} + a_2 a_3 u^n\}$

$I_s = K_s = a_1^{s-2} K_2 \cup \{a_1^{s-3} a_2^3 u^n\}$, $s \ge 3$,

$q = 4(c+i) \le 4d-4$, $1 \le i \le d-c-1$:

$K_0 = \{u^q\}$,

$I_1 = \{a_1 u^q + a_2 u^{q+1} + a_3 u^{q+2}\}$, $K_1 = I_1 \cup \{a_1 u^q\}$,

$I_2 = a_1 I_1 \cup \{a_1 a_2 u^{q+1} + a_1 a_3 u^{q+2} + a_2^2 u^{q+2} + a_2 a_3 u^{q+3}\}$,

$K_2 = I_2 \cup \{a_1^2 u^q\}$,

$I_3 = a_1 I_2 \cup \{a_1 a_2^2 u^{q+2} + a_2^2 a_3 u^{q+4},$

$a_1 a_3^2 u^{q+4} + a_2^3 u^{q+3} + a_2 a_3^2 u^{q+5} + a_3^3 u^{q+6}\}$,

$K_3 = I_3 \cup \{a_1^3 u^q\} = I_3 \cup \{a_2^2 a_3 u^{q+4} + a_1 a_3^2 u^{q+4}\}$

$q \le 4d-8$:

$I_4 = a_1 I_3 \cup \{a_2^4 u^{q+4},$

$a_1 a_2^3 u^{q+3} + a_1 a_2^2 a_3 u^{q+4} + a_2^3 a_3 u^{q+5} + a_2^2 a_3^2 u^{q+6},$

$a_1 a_2 a_3^2 u^{q+5} + a_2^3 a_3 u^{q+5} + a_1 a_3^3 u^{q+6} + a_2^2 a_3^2 u^{q+6} +$

$+ a_3^4 u^{q+8}\}$

$$K_4 = I_4 \cup \{a_1^4 u^q\} = I_4 \cup \{a_3^4 u^{q+8}\},$$

$q = 4d-4$ und $s \geq 4$:

$$I_s = K_s = a_1^{s-3} K_3 \cup \{a_1^{s-4} a_2^4 u^n\},$$

$q = 4(c+i)+3 \leq 4d-5$, $1 \leq i \leq d-c-2$; $s \leq 4$:

$$\begin{aligned} I_s = K_s = \{ & a_1^{s-1} a_2 u^{q+1}, \quad a_1^{s-2} a_2^2 u^{q+2} + a_1^{s-2} a_2 a_3 u^{q+3}, \\ & a_1^{s-3} a_2^3 u^{q+3} + a_1^{s-3} a_2 a_3^2 u^{q+5} + a_1^{s-4} a_2^2 a_3^2 u^{q+6} + \\ & + a_1^{s-4} a_2 a_3^3 u^{q+7} \}, \end{aligned}$$

$q = 4d-5$ und $s \geq 5$:

$$I_s = K_s = a_1^{s-4} I_4 \cup \{a_1^{s-5} a_2 u^n\},$$

$q = 4(c+i)+2 < 4d-6$, $1 \leq i \leq d-c-2$, $s \leq 4$:

$$\begin{aligned} I_s = K_s = \{ & a_1^s u^q + a_1^{s-1} a_3 u^{q+2}, \quad a_1^{s-2} a_2^2 u^{q+2}, \\ & a_1^{s-1} a_2 u^{q+1} + a_1^{s-1} a_3 u^{q+2} + a_1^{s-2} a_2 a_3 u^{q+3} + \\ & + a_1^{s-2} a_3^2 u^{q+4}, \quad a_1^{s-3} a_2^3 u^{q+3} + a_1^{s-3} a_2^2 a_3 u^{q+4}, \\ & a_1^{s-2} a_3^2 u^{q+4} + a_1^{s-3} a_2^3 u^{q+3} + a_1^{s-3} a_3^3 u^{q+6}, \\ & a_1^{s-4} a_2^4 u^{q+4} + a_1^{s-4} a_2^2 a_3^2 u^{q+6}, \\ & a_1^{s-3} a_2 a_3^2 u^{q+5} + a_1^{s-3} a_3^3 u^{q+6} + \sum_{i=0}^{4} a_1^{s-4} a_2^{4-i} a_3^i u^{q+4+i} \}, \end{aligned}$$

$q = 4d-5$:

$$\begin{aligned} I_5 = K_5 = a_1 I_4 \cup \{ & a_1 a_2^2 a_3^2 u^n + a_2^5 u^{n-1}, \\ & a_2^5 u^{n-1} + a_2^4 a_3 u^n \}, \end{aligned}$$

$$I_s = K_s = a_1^{s-5} I_5 \cup \{a_1^{s-6} a_2^6 u^n\}, \quad s \geq 6,$$

$q = 4(c+i)+1 \leq 4d-7, \quad 1 \leq i \leq d-c-2, \quad s \leq 4$:

$$I_s = K_s = \{a_1^{s-1}a_2u^{q+1} + a_1^{s-2}a_2a_3u^{q+3}, \quad a_1^{s-3}a_2^3u^{q+3},$$
$$a_1^{s-2}a_2^2u^{q+2} + a_1^{s-2}a_2a_3u^{q+3} + a_1^{s-3}a_2^2a_3u^{q+4} +$$
$$+ a_1^{s-3}a_2a_3^2u^{q+5},$$
$$a_1^{s-3}a_2a_3^2u^{q+5} + a_1^{s-4}a_2^4u^{q+4} + a_1^{s-4}a_2a_3^3u^{q+7},$$
$$a_1^{s-4}a_2^4u^{q+4} + a_1^{s-4}a_2^3a_3u^{q+5}\},$$

$q = 4d-7$:

$$I_5 = K_5 = a_1 I_4 \cup \{a_2^5u^{n-2} + a_2^3a_3^2u^n,$$
$$a_1a_2^2a_3^2u^{n-1} + a_1a_2a_3^3u^n + a_2^5u^{n-2} + a_2^4a_3u^{n-1}\},$$

$$I_6 = K_6 = a_1 I_5 \cup \{a_1a_2^3a_3^2u^n + a_2^6u^{n-1},$$
$$a_2^6u^{n-1} + a_2^5a_3u^n\}.$$

$$I_s = K_s = a_1^{s-6} I_6 \cup \{a_1^{s-7}a_2^7u^n\}, \quad s \geq 7,$$

$q = m+1$: $K_1 = \{a_2u^{m+2}\}$,

für $s \geq 2$ stimmen I_s und K_s mit den Basen für $q = 4(c+i)+3$ überein;

$q = m$: $I_2 = \{a_1a_2u^{m+1} + a_1a_3u^{m+2} + a_2^2u^{m+2} + a_2a_3u^{m+3} + a_3^2u^{m+4}\}$,

$K_2 = I_2 \cup \{a_2^2u^{m+2}\}$,

für $s = 3,4$ erhält man $I_s = K_s$ wie bei $q = 4(c+i)+2$;

$q = m-1$: wie bei $q = 4(c+i)+1$ erhält man für $s = 3,4$:

$I_s = K_s$;

$q = m-2$: $I_3 = \left\{ a_2^3 u^{m+1} + a_1 a_3^2 u^{m+2} + a_2 a_3^2 u^{m+3} + a_3^3 u^{m+4} \right\}$,

$K_3 = I_3 \cup \left\{ a_1 a_3^2 u^{m+2} + a_2^2 a_3 u^{m+2} \right\}$;

für $s = 4$ ergänzt man $a_1 I_3$ wie bei $q = 4(c+i)$ zu den Basen I_4 und K_4;

$q \leq m-3$, $q \neq m-6$;

aus den obigen Basen für die einzelnen Kongruenzklassen modulo 4 von q folgt leicht:

$I_s = K_s$; $s \leq 4$;

$q = m-6$: $K_4 = \left\{ a_3^4 u^{m+2} \right\}$.

Hieraus ergeben sich unmittelbar die für $n = 4d$ und $m = 4c+2$ angegebene Modulstruktur und mit dem Cup - Produkt in M die Produktrelationen.

Für die anderen Werte von n und m verfahre man analog.

Bemerkungen

1) Der von der kanonischen Projektion p induzierte Homomorphismus

$p^*: \mathrm{Ext}_{A_1}^{s,s-q}(Z_2, \tilde{H}^*(RP^n / RP^{4c+c'})) \longrightarrow \mathrm{Ext}_{A_1}^{s,s-q}(Z_2, \tilde{H}^*(RP^n / RP^{4c}))$,

$1 \leq c' \leq 4$, hat folgende Eigenschaften:

(i) $c' = 1,2$: p^* ist ein Isomorphismus für $q \geq 4c+4$ und $s \geq 0$ sowie für $q = 4c$ und $s \geq 2$, falls $c' = 1$, und für $s \geq 3$, falls $c' = 2$;

weiter gilt für $c' = 1$:

$p^*(g_1) = 0$, $p^*(g_3) = q_2^2 h'_c$;

(ii) $c' = 3,4$: p^* ist ein Isomorphismus für $q \geq 4c+8$ und $s \geq 0$ sowie, falls $c' = 4$, für $q = 4c+4$ und $s \geq 1$; für $c' = 3$ ist p^* surjektiv für $q = 4c+4$ und $s \geq 0$.

2) Die kanonische Projektion induziert einen Isomorphismus zwischen $\mathrm{Ext}_{A_1}(Z_2, \tilde{H}^*(RP^n/RP^{4c+4}))$ und einer Unteralgebra von $\mathrm{Ext}_{A_1}(Z_2, \tilde{H}^*(RP^n/RP^{4c+3}))$.

Lemma 3: Alle Differentiale dieser Spektralsequenz verschwinden.

Beweis: Sei zunächst $n = 8d+4$, $m = 8c-4$, $1 \leq c \leq d$.
Die einzigen Differentiale, deren Verschwinden nicht offensichtlich ist, sind von der Form

$$d_{2+4(d-i)} : E^{0,-8i}_{2+4(d-i)} \longrightarrow E^{2+4(d-i),-12i+4d+1}_{2+4(d-i)}, \quad c \leq i \leq d.$$

Für $i = d$ folgt mit der Relation $q_1^4 h_{2d-2} = q_4 h_{2d}$ bzw $q_4 h_{2d} = q_3 h'_{2d'-1}$, falls $c = d$ gilt, und der Injektivität der Multiplikation mit q_4

$$d_2(h_{2d}) = 0, \quad E_r^{2,-8d+1} \neq 0, \quad r \geq 2,$$

und somit

$$E^{2+4(d-i),-12i+4d+1}_{2+4(d-i)+1} \neq 0.$$

Folglich verschwinden auch die Differentiale $d_{2+4(d-i)}$ für $c \leq i \leq d-1$.

Für die weiteren Werte von n und m verlaufen die Beweise ähnlich.

Es bleibt noch die Algebra - Struktur von $\widetilde{bo}^*(X)$ zu bestimmen.
Analog zu §3, Lemma 3, gilt, vgl. Adams [3]:

Lemma 4: (i) Es gibt einen Homomorphismus $E_r^{s,t} \longrightarrow E_r^{s+1,t+1}$, der für $r = 2$ von der Multiplikation mit q_1 und für $r = \infty$ von der Multiplikation mit 2 in $\widetilde{bo}^*(X)$ durch Übergang zu Quotienten induziert wird.

(ii) Es gibt einen Homomorphismus $E_r^{s,t} \longrightarrow E_r^{s+4,s+t+12}$, der für $r = 2$ von der Multiplikation mit q_4 und für $r = \infty$ von der Multiplikation mit dem erzeugenden Element γ aus $\widetilde{bo}^{-8}(S^0)$ in $\widetilde{bo}^*(X)$ durch Übergang zu Quotienten induziert wird.

Mithin sind - $X = RP^{4d+d'}/RP^{4c+c'}$, $0 \le d' \le 3$, $-1 \le c' \le 2$ - die Gruppen $\widetilde{bo}^{4i}(X)$, $i \le d$, bzw der Torsionsanteil, falls $c' = -1$ und $i \le c$, zyklische Gruppen der Ordnung 2^{1_i}, und die Multiplikation mit γ induziert Isomorphismen

$$\gamma : \widetilde{bo}^{4i}(X) \longrightarrow 16\,\widetilde{bo}^{4(i-2)}(X), \quad c+3 \le i \le d,$$
$$\gamma : \widetilde{bo}^{4(c+2)}(X) \longrightarrow 2^{3-c'}\,\widetilde{bo}^{4c}(X), \quad c' = 0,1,2,$$
$$\gamma : \widetilde{bo}^{4i}(X) \longrightarrow \widetilde{bo}^{4(i-2)}(X), \quad i \le c+1.$$

Nach den Bemerkungen 1 und 2 induziert die Projektion p für $c' = 1,2$ und $q \ge 4c+4$ sowie für $c' = 3,4$ und $q \ge 4c+8$ Isomorphismen

$$p^* : \widetilde{bo}^q(RP^n/RP^{4c+c'}) \longrightarrow \widetilde{bo}^q(RP^n/RP^{4c})$$

und eine Isomorphie zwischen $\widetilde{bo}^*(RP^n/RP^{4c+4})$ und einer Unteralgebra von $\widetilde{bo}^*(RP^n/RP^{4c+3})$. Deshalb wird im Folgenden zwischen den entsprechenden Elementen nicht unterschieden.

Analog zum Beweis von Satz 1 verwenden wir, da $\widetilde{bo}^0(X)$ und $\widetilde{KO}^0(X)$ übereinstimmen, das folgende Resultat von Adams [2]:

Sei $M(n,m)$ die Anzahl der natürlichen Zahlen s, die $m < s \leq n$ und $s \equiv 0,1,2$ oder $4 \bmod 8$ erfüllen, ξ das kanonische Geradenbündel über RP^n und $\lambda = \xi - 1$. Dann gilt:

1) $\widetilde{KO}^0(RP^n) = Z_{2^f}$, $f = M(n,0)$, wird erzeugt von λ mit den beiden Relationen

$$\lambda^2 = -2\lambda, \quad \lambda^{f+1} = 0.$$

2) Sei $m \not\equiv -1 \bmod 4$. Dann induziert die kanonische Projektion p einen Isomorphismus zwischen $\widetilde{KO}^0(RP^n/RP^m)$ und der von λ^{g+1}, $g = M(m,0)$, erzeugten Untergruppe von $\widetilde{KO}^0(RP^n)$.

3) Für $m = 4c+3$ gilt

$$\widetilde{KO}^0(RP^n/RP^{4c+3}) = Z \oplus \widetilde{KO}^0(RP^n/RP^{4c+4});$$

der zweite Summand ist eingebettet durch die Projektion, der erste wird durch ein Element $\bar{\lambda}^{(g)}$, $g = M(4c+4, 0)$, erzeugt, das

$$p^*(\bar{\lambda}^{(g)}) = \lambda^g$$

erfüllt; p ist die Projektion $RP^n \longrightarrow RP^n/RP^{4c+3}$.

Insbesondere folgt also aus 2) für $m = 8c_1$ mit

$$\lambda^{(4c_1+1)} := (p^*)^{-1}(\lambda^{4c_1+1})$$

die Gleichung

$$(*) \qquad \lambda^{(4c_1+1)} \lambda^{(4c_1+1)} = -2^{4c_1+1} \lambda^{(4c_1+1)}.$$

Zum Bestimmen der Erzeugenden sind folgende Fallunterscheidungen zweckmäßig:

I) <u>$n = 8d+d'$, $d' = 6,7,8$</u>

(i) $m = 8c$

Bezeichnet $|\ |$ die Ordnung einer Guppe oder eines Gruppenelements, so folgt mit den Lemmata 2,3,4;

$$|\widetilde{bo}^{8c+4}(X)| = |\widetilde{bo}^{8c}(X)| = 2^{1_{2c}},$$

und die Multiplikation mit β ergibt einen Isomorphismus

$$\beta : \widetilde{bo}^{8c}(X) \longrightarrow \widetilde{bo}^{8c-4}(X).$$

Definiert man nun

$$y'_{2c} := (\gamma^c)^{-1} (\lambda^{(4c+1)})$$

$$y_{2c+1} := \gamma^{-1} (\beta\, y'_{2c})$$

$$y_{2c+2} := \gamma^{-1} (8y'_{2c})$$

$$y_i := \gamma^{-1} (2\beta\, y_{i-1}),\ 2c+3 \le i \le 2d+2,$$

so gilt:

$$\beta\, y_{2c+1} = 4y'_{2c},\quad \beta\, y_i = 8y_{i-1},\ 2c+2 \le i \le 2d+2.$$

Beweis: Die Relation $q_3\, h_{2c+1} = q_1^2\, h'_{2c}$ aus Lemma 2 impliziert die Existenz einer natürlichen Zahl k, so daß gilt:

$$\beta\, y_{2c+1} = 8ky'_{2c} + 4y'_{2c}.$$

Aus der Gleichung

$$4\beta\, y'_{2c} = 4\gamma\, y_{2c+1} = \beta^2\, y_{2c+1} = 4\beta\, y'_{2c} + 8k\beta\, y'_{2c}.$$

folgt mit $|\beta\, y'_{2c}| = |y'_{2c}| = 2^{1_{2c}}$

$$k = k'\, 2^{1_{2c}-3},\quad 0 \le k',$$

und somit die erste Behauptung.

Ebenso ergibt sich aus der Relation $q_3\, h_{2c+2} = q_1^3\, h_{2c+1}$ die Gleichung

$$\beta\, y_{2c+2} = 16ky_{2c+1} + 8y_{2c+1},\ 0 \le k.$$

Der Vergleich von $\beta\gamma\, y_{2c+2}$ mit $\gamma\beta\, y_{2c+2}$ liefert

$$\beta\, y_{2c+2} = 8y_{2c+1}.$$

Für $2c+3 \le i \le 2d+2$ folgt die Behauptung analog durch vollständige Induktion.

Aus diesen Relationen folgen für $1 \leq i \leq d-c+1$ sofort die Gleichungen

$$\gamma^{c+i} y_{2(c+1)} = 2^{4(i-1)+3} \lambda^{(4c+1)},$$
$$\gamma^{c+i} y_{2(c+i)-1} = \beta\, 2^{4(i-1)} \lambda^{(4c+1)},$$

die mit der Injektivität der Multiplikation mit γ und (*) die Relationen

$$(y'_{2c})^2 = -4y_{4c}, \quad y'_{2c} y_i = -2y_{2c+i},$$
$$y_i y_j = -y_{i+j}, \quad 2c+1 \leq i,j \leq 2d+2$$

ergeben.

Die weiteren Relationen sowie die zusätzlichen Erzeugenden und Relationen für die verschiedenen Werte von d' erhält man unmittelbar aus den entsprechenden Ergebnissen in Lemma 2.

(ii) $m = 8c+1$

Aus der Bemerkung 1(i) folgt, daß

$$p^* : \widetilde{bo}^{8c}(RP^n / RP^{8c+1}) \longrightarrow 2\,\widetilde{bo}^{8c}(RP^n / RP^{8c})$$

ein Isomorphismus ist. Definiert man deshalb

$$x_2 := (p^*)^{-1}(2y'_{2c}),$$

so folgen mit Lemma 2 und (i) die Relationen

$$\alpha\, x_2 = 0, \quad \beta\, y_{2c+1} = 2x_2, \quad \beta\, x_2 = 2\gamma\, y_{2c+1}, \quad x_2^2 = -16y_{4c},$$
$$x_2 y_i = -4y_{2c+i}, \quad 2c+1 \leq i \leq 2d+2.$$

Außerdem lassen sich offenbar x_1 und x_3 so wählen, daß gilt:

$$\beta\, x_1 = 2x_3, \quad \beta\, x_3 = 2\gamma\, x_1.$$

Die weiteren Relationen und die für die einzelnen Werte von d' zusätzlich gültigen ergeben sich sofort mit Bemerkung 1(i), Lemma 2 und (i).

(iii) $m = 8c+2$

Triviale Folgerung aus Bemerkung 1(i), Lemma 2 und (i).

(iv) $m = 8c+3,\ 8c+4$

Nach Bemerkung 1(ii) sind folgende Definitionen sinnvoll:

$$y'_{2c+1} := (p^*)^{-1}\ (2y_{2c+1})$$

und $\bar{y}_{2c+1}$ sei so gewählt, daß gilt:

$$p^*\ (\bar{y}_{2c+1}) = y_{2c+1}.$$

Dann folgen die angegeben Resultate aus (i).

Bemerkung 3: Durch die Operation von $\widetilde{bo}^*(S^0)$ auf $\widetilde{bo}^*(RP^n/\ RP^{8c+3})$ wird $\bar{y}_{2c+1}$ auf $\bar{\lambda}^{(4c+4)}$ in $\widetilde{bo}^0(RP^n/\ RP^{8c+3})$ abgebildet.

Ausgehend von $m = 8c+4$ verfahre man für $m = 8c+c'$ mit $c' = 5,6,7$ analog.

II) $n = 8d+d',\ d' = 2,3,4$

$m = 8c$

Lemma 2 impliziert, daß die Multiplikation mit β einen Isomorphismus

$$\beta : \widetilde{bo}^{8c+4}(X) \longrightarrow 4\ \widetilde{bo}^{8c}(X)$$

induziert. Definiert man deshalb

$$y_{2c+1} := \beta^{-1}\ (4y'_{2c})$$

und die anderen Elemente wie in I),(i), so ergeben sich wie dort die Gleichung

$$\beta\ y'_{2c} := \gamma\ y_{2c+1}$$

und die weiteren Relationen.

Für die anderen Werte von m erhält man das Ergebnis wie in I.

III) $\underline{n = 8d+d',\ d' = 1,5}$

$m = 8c$

Aus Lemma 2 folgt:

$$2\,|\widetilde{bo}^{8c+4}(X)| = |\widetilde{bo}^{8c}(X)| = 2^{l}\ ,$$

$$\beta : \widetilde{bo}^{8c+4}(X) \longrightarrow 4\,\widetilde{bo}^{8c}(X)$$

ist surjektiv und Ker $\beta = Z_2$.

Es gibt also zwei Erzeugende e und $e' = (2^{l-2}+1)e$ von $\widetilde{bo}^{8c+4}(X)$ mit

$$\beta\, e = \beta\, e' = 4y'_{2c}.$$

Unter Verwendung von $\beta^2 = 4\gamma$ und $\beta\gamma = \gamma\beta$ folgt hieraus:

$$\beta\, y'_{2c} = \gamma\, e \quad \text{oder} \quad \beta\, y'_{2c} = \gamma\, e'.$$

Daher gibt es ein erzeugendes Element y_{2c+1} von $\widetilde{bo}^{8c+4}(X)$, für das gilt:

$$\beta\, y_{2c+1} = 4y'_{2c} \quad \text{und} \quad \beta\, y'_{2c} = \gamma\, y_{2c+1}.$$

Die Elemente y_i, $2c+2 \le i \le 2d+1$, definiere man wie in I,(i). Außerdem lassen sich trivialerweise Erzeugende v_1 und v_5 so wählen, daß die Relationen

$$\beta\, v_1 = 2v_5, \quad \beta\, v_5 = 2\gamma\, v_1$$

erfüllt sind.

Für $c = 0$ folgen die Relationen

$$y'_o v_1 = y'_o v_5 = y_1 v_5 = 0$$

aus der Verträglichkeit des Produktes mit der Operation von $\widetilde{bo}^*(S^o)$ auf $\widetilde{bo}^*(X)$. Alle weiteren Relationen ergeben sich wie in I oder folgen sofort aus den entsprechenden Aussagen in Lemma 2.

Analog zu I erhält man das Resultat für die anderen Werte von m. Damit ist Satz 3 bewiesen.

Um zur Berechnung von $\widetilde{bo}_*(X)$ die E_2 - Terme $Ext_{A_{1*}}^{s,s+q}(Z_2, N)$ der Adams - Spektralsequenz mittels einer Auflösung durch erweiterte A_{1*} - Comoduln konstruieren zu können, ist zunächst wiederum die Cooperation

$$\Phi_N : N \longrightarrow A_{1*} \otimes N$$

zu bestimmen. Mit §3, Lemma 4 und der durch $Sq^j u^i = \binom{i}{j} u^{i+j}$ gegebenen Operation von A_1 auf M erhält man durch einfache Rechnungen, wobei die Elemente von A_{1*} mit $\xi_1^p \xi_2^q$, $0 \le p \le 3$, $q = 0,1$, bezeichnet werden;

$$\Phi_N(w_{4t}) = 1 \otimes w_{4t} + \xi_1 \otimes w_{4t-1} + \xi_1^2 \otimes w_{4t-2} + \xi_2 \otimes w_{4t-3} + \xi_1^2 \xi_2 \otimes w_{4t-5},$$

$$\Phi_N(w_{4t+2}) = 1 \otimes w_{4t+2} + \xi_1 \otimes w_{4t+1} + \xi_1^3 \otimes w_{4t-1} + \xi_2 \otimes w_{4t-1},$$

$$\Phi_N(w_{4t+1}) = 1 \otimes w_{4t+1} + \xi_1^2 \otimes w_{4t-1},$$

$$\Phi_N(w_{4t+3}) = 1 \otimes w_{4t+3}, \qquad m+1 \le 4t+i \le n, \; i = 0,1,2,3.$$

Folglich ist der von den Elementen w_{m+1}, w_{2t+1}, $m+2 \le 2t+1 \le n$, erzeugte Z_2 - Modul P ein Unter-Comodul von N und

$$0 \longrightarrow P \longrightarrow N \longrightarrow N/P \longrightarrow 0$$

eine exakte Sequenz von A_{1*} - Comoduln. Da für P und $Q := N/P$ ebenso kurze exakte Sequenzen mit den primitiv erzeugten A_{1*} - Comoduln P' und $P'' := P/P'$ bzw Q' und $Q'' := Q/Q'$ existieren, läßt sich eine Auflösung von N durch erweiterte A_{1*} - Comoduln wiederum aus einer Auflösung von Z_2 konstruieren, siehe §3; letztere erhält man in Analogie zu [6] wie folgt.

Die von ξ_1^2 erzeugte äußere Algebra $E(\xi_1^2)$ ist Unter - Coalgebra von A_{1*}. Eine Auflösung von Z_2 durch erweiterte $E(\xi_1^2)$ - Comoduln ist - siehe §3-

$$(X_* := E(\xi_1^2) \otimes Z_2[a_2],\ d_X,\ e_X),$$

Grad $a_2 = 2$, $X_i := E(\xi_1^2) \otimes a_2^i$, d_X ist eine Derivation mit

$$d_X(\xi_1^2) = a_2, \quad d_X(a_2) = 0,$$

und e_X ist die Erweiterung der Coalgebra $E(\xi_1^2)$.

X_i ist ein A_{1*} - Comodul mit der Cooperation

$$\phi_{X_i}(\xi_1^2\, a_2^i) = 1 \otimes \xi_1^2\, a_2^i + \xi_1^2 \otimes a_2^i.$$

Auflösungen $(Y_{i*},\ d_o,\ e_i)$ von X_i durch erweiterte A_{1*} - Comoduln lassen sich folgendermaßen konstruieren:

Sei $Y_{i*} := A_{1*} \otimes a_2^i \otimes Z_2[a_1, a_3]$, Grad $a_1 = 1$, Grad $a_3 = 3$, C_j' der von allen Monomen $a_1^{j-k} a_3^k$, $0 \le k \le j$, erzeugte Z_2 - Modul, $Y_{i,j} := A_{1*} \otimes a_2^i \otimes C_j'$,

$$d_o : Y_{i,j} \longrightarrow Y_{i,j+1}$$

eine Derivation mit

$$d_o(\xi_1) = a_1, \quad d_o(\xi_2) = \xi_1^2 a_1 + a_3, \quad d_o(a_i) = 0, \quad i = 1,2,3$$

und

$$e_i : X_i \longrightarrow A_{1*} \otimes a_2^i$$

die Inklusion. Dann zeigen einfache Rechnungen, daß d_o ein A_{1*} - Comodul - Homomorphismus und die Sequenz exakt ist.

Sei nun $W_* := \sum_{i \ge 0} Y_i = A_{1*} \otimes Z_2[a_1, a_2, a_3]$, $W_s = \sum_{i=0}^{s} Y_{i,s-i} = A_{1*} \otimes C_s$, C_s wie oben,

$$e : Z_2 \longrightarrow A_{1*}$$

die Erweiterung der Coalgebra A_{1*} und

$$d_k : Y_{i,j} \longrightarrow Y_{i+k,j-k+1},\ k \ge 0,$$

definiert durch, $b \in A_{1*}$:

d_0 wie oben,

$$d_1(b\, a_1^{j-k}a_2^i a_3^k) = k\, b\, a_1^{j-k+1}a_2^{i+1}a_3^{k-1} + d_1(b)\, a_1^{j-k}a_2^i a_3^k \text{ und}$$

$$d_1(\xi_1) = d_1(\xi_2) = 0,\quad d_1(\xi_1^2) = a_2,$$

$$d_1(\xi_1^3) = \xi_1 a_2,\quad d_1(\xi_1 \xi_2) = \xi_1^2 a_2,$$

$$d_1(\xi_1^2 \xi_2) = \xi_2 a_2,\quad d_1(\xi_1^3 \xi_2) = \xi_1 \xi_2 a_2;$$

$$d_2(\xi_1^p \xi_2^q a_1^{j-k}a_2^i a_3^k) = kp\, \xi_1^{p-1} \xi_2^q a_1^{j-k}a_2^{i+2}a_3^{k-1} + kq\, \xi_1^{p+2} a_1^{j-k}a_2^{i+2}a_3^{k-1};$$

$$d_3(b\, a_1^{j-k}a_2^i a_3^k) = \binom{k}{2} b\, a_1^{j-k}a_2^{i+3}a_3^{k-2};$$

$$d_n(b\, a_1^{j-k}a_2^i a_3^k) = 0,\quad n \geq 4.$$

Dann gilt:

Lemma 5: (i) Die Abbildungen d_k sind A_{1*} - Comodul - Homomorphismen;

(ii) $e_{i+1}\, d_X = d_1\, e_i$, $i \geq 0$;

(iii) $\sum_{l=0}^{k} d_{k-l}\, d_l = 0$;

(iv) Sei $d = \sum_{k\geq 0} d_k$. Dann ist (W_*, d, e) eine Auflösung von Z_2 durch erweiterte A_{1*} - Coduln.

Beweis: Die Verträglichkeit von d_k mit der A_{1*} - Cooperation von $Y_{i,j}$ bzw $Y_{i+k,j-k+1}$ und die Gleichung (ii) rechnet man unschwer nach.

Zu (iii). Sei $y_{i,j} := \xi_1^p \xi_2^q a_1^{j-k}a_2^i a_3^k \in Y_{i,j}$. Dann ist zu zeigen:

(a) $d_1 d_0 + d_0 d_1 = 0$

$$(d_1 d_0 + d_0 d_1)(y_{i,j}) = p\, d_1(\xi_1^{p-1} \xi_2^q)\, a_1^{j-k+1}a_2^i a_3^k +$$

$+ q(\xi_1^p\, a_1^{j-k+1} a_2^{i+1} a_3^k + d_1(\xi_1^{p+2})\, a_1^{j-k+1} a_2^i a_3^k + d_1(\xi_1^p)\, a_1^{j-k} a_2^i a_3^{k+1}$

$+ d_o(d_1(\xi_1^p\, \xi_2^q)\, a_1^{j-k} a_2^i a_3^k);$

der letzte Term verschwindet für $p = 0,1,2$ und $q = 0$ sowie

für $p = 0,1$ und $q = 1$; in den anderen Fällen erhält man für

$p = 3, q = 1: \xi_2\, a_1^{j-k+1} a_2^{i+1} a_3^k + \xi_1^3 a_1^{j-k+1} a_2^{i+1} a_3^k + \xi_1\, a_1^{j-k} a_2^{i+1} a_3^{k+1}$,

$p = 2, q = 1: \xi_1^2\, a_1^{j-k+1} a_2^{i+1} a_3^k + a_1^{j-k} a_2^{i+1} a_3^{k+1}$,

$p = 3, q = 0: \quad a_1^{j-k+1} a_2^{i+1} a_3^k.$

Daraus folgt (a).

(b) $d_o\, d_2 + d_1\, d_1 + d_2\, d_o = 0$

Für die einzelnen Terme gilt mit $y_{i+2,j} := \xi_1^{p-1}\, a_1^{j-k} a_2^{i+2} a_3^k$

$d_2\, d_o(y_{i,j}) = (k+1)\, pq\, y_{i+2,j}$,

$d_o\, d_2(y_{i,j}) = \quad k \quad pq\, y_{i+2,j}$,

$d_1\, d_1(y_{i,j}) = \qquad pq\, y_{i+2,j}$.

Damit ist (b) bewiesen.

(c) $d_o\, d_3 + d_1\, d_2 + d_2\, d_1 + d_3\, d_3 = 0$

$(d_o\, d_3 + d_3\, d_o)\,(y_{i,j}) = kq\, \xi_1^p\, a_1^{j-k} a_2^{i+3} a_3^{k-1}$,

$(d_1\, d_2 + d_2\, d_1)\,(y_{i,j}) = kq\, \xi_1^p\, a_1^{j-k} a_2^{i+3} a_3^{k-1} +$

$+ kp\, d_1(\xi_1^{p-1}\, \xi_2^q)\, a_1^{j-k} a_2^{i+2} a_3^{k-1} + kq\, d_1(\xi_1^{p+2})\, a_1^{j-k} a_2^{i+2} a_3^{k-1}$

$+ k\, d_2(d_1(\xi_1^p\, \xi_2^q)\, a_1^{j-k} a_2^i a_3^k);$

in folgenden Fällen ist der letzte Term bei ungeradem k ungleich Null:

$p = 3,\ q = 1: \xi_1^3\, a_1^{j-k} a_2^{i+3} a_3^{k-1} + \xi_2\, a_1^{j-k} a_2^{i+3} a_3^{k-1}$,

$p = 2,\ q = 1: \xi_1^2\, a_1^{j-k} a_2^{i+3} a_3^{k-1}$,

$p = 3,\ q = 0: \quad a_1^{j-k} a_2^{i+3} a_3^{k-1}$; somit gilt (c).

(d) $d_1 d_3 + d_2 d_2 + d_3 d_1 = 0$

Aus der Definition von d_2 ergibt sich sofort: $d_2 d_2 = 0$,

für die beiden anderen Terme gilt, $b \in A_{1*}$:

$$d_1 d_3(y_{i,j}) = d_3 d_1(y_{i,j}) = k \binom{k-1}{2} b\, a_1^{j-k+1} a_2^{i+4} a_3^{k-3} + \binom{k}{2} d_1(b)\, a_1^{j-k} a_2^{i+3} a_3^{k-2} .$$

Dies beweist (d).

(e) Die Gleichungen $d_2 d_3 + d_3 d_2 = d_3 d_3 = 0$ folgen unmittelbar aus den Definitionen der Abbildungen.

Zu (iv): Es ist nur noch zu zeigen, daß W_* azyklisch unter d ist. Für die der Filtrierung $F_p W_* := \sum_{i \le p} Y_i$ von W_* assoziierten Spektralsequenz ergibt sich:

$E_p^0 = F_p W_* / F_{p-1} W_* = Y_p$, und das Differential d^0 stimmt mit d_o überein. Somit gilt $E_p^1 = X_p$, und für das Differential d^1 erhält man mit (ii) $d^1 = d_X$. Da X_* azyklisch unter d_X ist, folgt die Behauptung.

Also ist für $D = P', P'', Q', Q''$ $(W_* \otimes D,\ d_D,\ \Phi_D)$ eine Auflösung von D durch erweiterte A_{1*} - Comoduln, wobei

$$d_D : W_s \otimes D \longrightarrow W_{s+1} \otimes D, \quad s \ge 0,$$

definiert ist durch - die Elemente von Q' und Q'' werden ebenfalls mit w_i, $m+2 \le i \le n$, bezeichnet -

$$d_D(b\, a_1^{s-i-k} a_2^{i} a_3^{k} w_i) = d(b\, a_1^{s-i-k} a_2^{i} a_3^{k}) w_i, \quad b \in A_{1*},\ m+1 \le i \le n.$$

Zur Konstruktion einer Auflösung von N sind noch - siehe §3 - die "Diagonalabbildungen" zu bestimmen, u.z. zunächst die Homomorphismen - $D = P, Q$ -

$$f^D : D'' \longrightarrow A_{1*} \otimes D',$$

$$f_s^D : W_s \otimes D'' \longrightarrow W_{s+1} \otimes D'.$$

Werden diese definiert durch

$$f^D(w_i) = \xi_1^2 w_{i-2}, \qquad m+2 \le i \le n,$$

$$f_s^D(b\, a_1^{s-i-k} a_2^i a_3^k w_i) = b\, a_1^{s-i-k} a_2^{i+1} a_3^k w_{i-2},$$

so sind f_s^D offensichtlich A_{1*} - Comodul - Homomorphismen, und es gelten, wie man leicht verifiziert, die Gleichungen

$$d_{D'} f^D + f_o \Phi_{D''} = 0,$$

$$d_{D'} f_s^D + f_{s+1}^D d_{D''} = 0.$$

Somit sind $(W_* \otimes P, d_P, \Phi_P)$ und $(W_* \otimes Q, d_Q, \Phi_Q)$ mit

$$d_P(b\, a_1^{s-i-k} a_2^i a_3^k w_{2t+1}) = d(b\, a_1^{s-i-k} a_2^i a_3^k) w_{2t+1}$$
$$+ (t+1)\, b\, a_1^{s-i-k} a_2^{i+1} a_3^k w_{2t-1}, \quad m+1 \le 2t+1 \le n,$$

$$d_Q(b\, a_1^{s-i-k} a_2^i a_3^k w_{2t}) = d(b\, a_1^{s-i-k} a_2^i a_3^k) w_{2t}$$
$$+ (t+1)\, b\, a_1^{s-i-k} a_2^{i+1} a_3^k w_{2t-2}, \quad m+2 \le 2t \le n$$

Auflösungen von P und Q.

Die Abbildungen

$$g : Q \longrightarrow A_{1*} \otimes P$$

$$g_s : W_s \otimes Q \longrightarrow W_{s+1} \otimes P$$

werden definiert durch, $m+2 \le 2t \le n$,

$$g(w_{2t}) = \xi_1 w_{2t-1} + \xi_2 w_{2t-3} + t\, \xi_1^3 w_{2t-3} + (t+1)\, \xi_1^2 \xi_2 w_{2t-5},$$

$$g_s(b\, a_1^{s-i-k} a_2^i a_3^k w_{2t}) = b\, a_1^{s-i-k+1} a_2^i a_3^k w_{2t-1} + b\, a_1^{s-i-k} a_2^a a_3^{k+1} w_{2t-3}$$
$$+ (s-i-k)\, b\, a_1^{s-i-k-1} a_2^{i+2} a_3^k w_{2t-3}.$$

Dann ist g_s trivialerweise mit der Cooperation verträglich, und es gilt:

$$d_P\, g + g_o\, \phi_Q = 0 ,$$

$$d_P\, g_s + g_{s+1}\, d_Q = 0 .$$

Beweis: Die erste Gleichung ist unschwer zu verifizieren, die zweite sieht man folgendermaßen ein. Sei für $i = 0,.,3$,

$$c_i := d_i(b\, a_1^{s-i-k+1} a_2^{i} a_3^{k}) w_{2t-1} + d_i(b\, a_1^{s-i-k} a_2^{i} a_3^{k+1}) w_{2t-3}$$
$$+ (s-i-k)\, d_i(b\, a_1^{s-i-k-1} a_2^{i+2} a_3^{k}) w_{2t-3}$$

und $a := b\, a_1^{s-i-k} a_2^{i} a_3^{k}$. Dann gilt

$$(d_P\, g_s + g_{s+1}\, d_Q)\,(a w_{2t}) = \sum_{i=0}^{3} c_i + \sum_{i=0}^{3} g_{s+1}(d_i(a) w_{2t})$$
$$+ b\, a_1^{s-i-k+1} a_2^{i+1} a_3^{k} w_{2t-3}$$

und

$$c_1 + g_{s+1}(d_1(a) w_{2t}) = k\, b\, a_1^{s-i-k} a_2^{i+3} a_3^{k-1} w_{2t-3}$$
$$+ b\, a_1^{s-i-k+1} a_2^{i+1} a_3^{k} w_{2t-3} ,$$

$$c_3 + g_{s+1}(d_3(a) w_{2t}) = k\, b\, a_1^{s-i-k} a_2^{i+3} a_3^{k-1} w_{2t-3} ,$$

$$c_o + g_{s+1}(d_o(a) w_{2t}) + c_2 + g_{s+1}(d_2(a) w_{2t}) = 0 .$$

Damit ist die zweite Gleichung bewiesen.

Zusammengefaßt ergibt sich die folgende Auflösung $(V_*, \bar{d}_*, \phi_N)$ von N durch erweiterte A_{1*} - Comoduln:

$$V_s = A_{1*} \otimes C_s \otimes N = W_s \otimes N , \quad s \geq 0,$$

$$\bar{d}_s : W_s \otimes N \longrightarrow W_{s+1} \otimes N$$

wird gegeben durch ($a = b\, a_1^{s-i-k} a_2^{i} a_3^{k} \in W_s$):

$$\bar{d}_s(aw_{4t}) = d(a)w_{4t} + b\, a_1^{s-i-k}a_2^{i+1}a_3^{k}w_{4t-2} + g_s(aw_{4t}),$$

$$\bar{d}_s(aw_{4t+1}) = d(a)w_{4t+1} + b\, a_1^{s-i-k}a_2^{i+1}a_3^{k}w_{4t-1},$$

$$\bar{d}_s(aw_{4t+2}) = d(a)w_{4t+2} + g_s(aw_{4t+2}),$$

$$\bar{d}_s(aw_{4t+3}) = d(a)w_{4t+3},$$

und ϕ_N ist die Cooperation.

Die natürlichen Isomorphismen

$$\mathrm{Hom}^*_{A_{1*}}(Z_2,\ A_{1*} \otimes Z_2[a_1,a_2,a_3] \otimes N) \cong \mathrm{Hom}^*_{Z_2}(Z_2,\ Z_2[a_1,a_2,a_3] \otimes N)$$
$$\cong Z_2[a_1,a_2,a_3] \otimes N$$

führen das Differential $\mathrm{Hom}(1,\bar{d}_*)$ über in die Beschränkung von $\bar{d}_*$ auf $Z_2[a_1,a_2,a_3] \otimes N$, die wiederum mit $\bar{d}_*$ bezeichnet wird. Insbesondere ergibt sich dann für

$$d : C_s \longrightarrow C_{s+1}$$

$$d(a_1^{s-i-4k-3}a_2^{i}a_3^{4k+3}) = a_1^{s-i-4k-2}a_2^{i+2}a_3^{4k+2} + a_1^{s-i-4k-3}a_2^{i+3}a_3^{4k+1},$$

$$d(a_1^{s-i-4k}a_2^{i-2}a_3^{4k+2}) = a_1^{s-i-4k}a_2^{i+1}a_3^{4k},$$

$$d(a_1^{s-i-4k-1}a_2^{i}a_3^{4k+1}) = a_1^{s-i-4k}a_2^{i+1}a_3^{4k},$$

$$d(a_1^{s-i-4k}a_2^{i}a_3^{4k}) = 0.$$

Um die Modulstruktur von $\mathrm{Ext}_{A_{1*}}(Z_2,\ N)$ über $\mathrm{Ext}_{A_{1*}}(Z_2,Z_2) = \mathrm{Ext}_{A_1}(Z_2,Z_2)$ anzugeben, setzen wir wieder $m = 4c+c'$, $-1 \le c' \le 2$, $n = 4d+d'$, $0 \le d' \le 3$, und definieren in $\mathrm{Ext}_{A_{1*}}(Z_2,\ N)$ die Klassen

$$u_i := [w_{4i-1}] \in \mathrm{Ext}^{0,4i-1}_{A_{1*}}(Z_2,\ N), \quad c+1 \le i \le d,$$

und falls

$$c' = -1,0 : \quad u'_c := [w_{4c+1}] \in \mathrm{Ext}^{0,4c+1}_{A_{1*}}(Z_2,\ N),$$

$c' = -1$: $\bar{u}_c := \left[w_{4c}\right] \in \mathrm{Ext}_{A_{1*}}^{0,4c}(Z_2, N)$,

$c' = 1$: $t_1 := \left[w_{4c+2}\right] \in \mathrm{Ext}_{A_{1*}}^{0,4c+2}(Z_2, N)$,

$t_2 := \left[a_2^2 w_{4c+4} + a_2 a_3 w_{4c+3} + a_3^2 w_{4c+2}\right] \in \mathrm{Ext}_{A_{1*}}^{2,4c+8}(Z_2, N)$,

$c' = 2$: $t_3 := \left[a_2 w_{4c+4} + a_3 w_{4c+3}\right] \in \mathrm{Ext}_{A_{1*}}^{1,4c+6}(Z_2, N)$,

sowie falls

$d' = 1$: $s_1 := \left[a_1 w_{4d+1} + a_3 w_{4d-1}\right] \in \mathrm{Ext}_{A_{1*}}^{1,4d+2}(Z_2, N)$,

$s_2 := \left[a_2^2 w_{4d+1} + a_3^2 w_{4d-1}\right] \in \mathrm{Ext}_{A_{1*}}^{2,4d+5}(Z_2, N)$,

$s_3 := \left[a_1 a_3^2 w_{4d+1} + a_2^2 a_3 w_{4d+1} + a_3^3 w_{4d-1}\right] \in \mathrm{Ext}_{A_{1*}}^{3,4d+8}(Z_2, N)$

$d' = 2,3$: $s_4 := \left[a_2 w_{4d+2} + a_3 w_{4d+1}\right] \in \mathrm{Ext}_{A_{1*}}^{1,4d+4}(Z_2, N)$,

$d' = 3$: $\bar{u}_{d+1} := \left[w_{4d+3}\right] \in \mathrm{Ext}_{A_{1*}}^{0,4d+3}(Z_2, N)$.

Bezeichnen wir mit $U_c^{d'}$ die Vereinigung u_i, $c+1 \le i \le d$, mit den für die einzelnen Werte von c' und d' zusätzlich definierten Elementen, so gilt:

Lemma 6: $\mathrm{Ext}_{A_{1*}}(Z_2, N)$ wird als $\mathrm{Ext}_{A_{1*}}(Z_2, Z_2)$ - Modul erzeugt von $U_c^{d'}$; alle Relationen ergeben sich aus den folgenden, $0 \le m \le n-5$,

$$q_1^4 u_{c+2} = 0,\ q_1^3 u_i = q_3 u_{i-1},\ q_4 u_{i-1} = q_1 q_3 u_i, \qquad c+2 \le i \le d ,$$

$$q_2 u_i = 0,\ c+1 \le i \le d;$$

und zusätzlich für

$c' = -1,0$: $q_1 u_c' = q_3 u_c' = 0,\ q_2^2 u_c' = q_1^2 u_{c+1}$;

$c' = 1$: $q_1 u_{c+1} = q_2 t_1,\ q_1 t_2 = q_3 t_1,\ q_2 t_2 = q_3 u_{c+1},$

$q_3 t_2 = q_1 q_4 t_1;$

$c' = 2$: $q_1 u_{c+1} = q_2 u_{c+1} = q_1 t_3 = 0,\ q_2^2 t_3 = q_3 u_{c+1}$;

$d' = 1$: $q_1 s_2 = q_3 u_d$, $q_2 s_i = q_2 u_d = 0$, $i = 1,2,3$,

$q_3 s_1 = q_1 s_3$, $q_3 s_2 = q_1 q_4 u_d$, $q_3 s_3 = q_1 q_4 s_1$;

$d' = 2,3$: $q_1^2 s_4 = q_3 u_d$, $q_2 u_d = 0$, $q_3 s_4 = q_4 u_d$.

Für $\underline{n = m+2,\ m \geq 0}$, gilt:

$U_0^2 = \{u'_d,\ s_4\}$ mit den Relationen

$q_1 u'_d = q_1 s_4 = 0$, $q_2^2 s_4 = q_3 u'_d$, $q_3 s_4 = 0$;

$U_2^0 = \{u_d,\ t_3\}$ mit den Relationen

$q_1 u_d = q_1 t_3 = 0$, $q_2^2 t_3 = q_3 u_d$, $q_3 t_3 = 0$;

$U_{-1}^1 = \{\bar{u}_d,\ u'_d\}$ und $U_1^3 = \{t_1,\ \bar{u}_{d+1}\}$ sind freie Erzeugendensysteme.

Für $\underline{n = m+3,\ m \geq 0}$, gilt:

$U_0^3 = \{u'_d,\ s_4,\ \bar{u}_{d+1}\}$, $U_{-1}^2 = \{\bar{u}_d,\ u'_d,\ s_4\}$,

die Relationen stimmen mit denen für U_0^2 überein.

Für $\underline{n = m+4 = 4d+3,\ d \geq 1}$, gilt:

$U_{-1}^3 = \{\bar{u}_d,\ u'_d,\ s_4,\ \bar{u}_{d+1}\}$,

die Relationen stimmen mit denen für U_0^2 überein.

In den anderen Fällen gelten dieselben Relationen wie für $m \leq n-5$.

Beweis: Analog zum Beweis von Lemma 2 zeigt man zunächst, daß für $m+1 \leq q$ und $q \neq n-8,\ n-4$, falls n ungerade ist,

$$q_4 : E_2^{s,s+q} \longrightarrow E_2^{s+4,s+q+12}, \quad s \geq 1,$$

ein Isomorphismus ist.

Für ungerades n ist dieser Homomorphismus injektiv, u.z. hat für $n = 4d+1$ jede von $q_1^{s+3}\, s_1$ in $E_2^{s+4,s+4d+5}$ bzw von $q_1^{s+1}\, s_3$ in $E_2^{s+4,s+4d+9}$ verschiedene Klasse ein Urbild in $E_2^{s,s+4d-7}$ bzw in $E_2^{s,s+4d-3}$; für $n = 4d+3$ gilt die analoge Aussage für die Elemente $q_1^{s+4}\, \bar{u}_{d+1}$ in $E_2^{s+4,s+4d+7}$ und $q_1^{s+1} q_3\, \bar{u}_{d+1}$ in $E_2^{s+4,s+4d+11}$.

Die restlichen E_2 - Terme $E_2^{s,s+q}$ sind unschwer zu bestimmen. So erhält man z.B. für $q = 4i-1$, $c+2 \le i \le d$, $0 \le s \le 4$, die Elemente u_i und die Gleichungen

$$q_1^4\, u_{c+2} = 0, \quad q_1^3\, u_i = q_3\, u_{i-1}, \quad c+3 \le i \le d,$$

$$q_4\, u_{i-1} = q_1 q_3\, u_i, \quad c+3 \le i \le d-1,$$

sofort aus den folgenden Basen I_s von Im $\bar{d}_{s-1}$ und K_s von Ker $\bar{d}_s$:

$K_0 = \{ w_q \}$,

$$\begin{aligned} I_s = \{ & a_1^s w_q + a_1^{s-1} a_2 w_{q-1} + a_1^{s-1} a_3 w_{q-2} + (s-1)\, a_1^{s-2} a_2^2 w_{q-2} , \\ & a_1^{s-1} a_2 w_{q-1} + a_1^{s-1} a_3 w_{q-2} + a_1^{s-2} a_3^2 w_{q-4} + s\, a_1^{s-3} a_2^2 a_3 w_{q-4} , \\ & a_1^{s-2} a_2^2 w_{q-2} + a_1^{s-3} a_2^2 a_3 w_{q-4} , \quad a_1^{s-4} a_2^4 w_{q-4} , \\ & a_1^{s-2} a_2^2 w_{q-4} + a_1^{s-3} a_2^3 w_{q-3} + a_1^{s-3} a_2 a_3^2 w_{q-5} + a_1^{s-3} a_3^3 w_{q-6} \\ & \qquad + (s-1)\, a_1^{s-4} a_2^2 a_3^2 w_{q-6} , \\ & a_1^{s-3} a_2^3 w_{q-3} + a_1^{s-3} a_2^2 a_3 w_{q-4} + a_1^{s-4} a_2^3 a_3 w_{q-5} + a_1^{s-4} a_2^2 a_3^2 w_{q-6} , \\ & a_1^{s-3} a_2 a_3^2 w_{q-5} + a_1^{s-3} a_3^3 w_{q-6} + a_1^{s-4} a_2^3 a_3 w_{q-5} + a_1^{s-4} a_3^4 w_{q-8} \} \end{aligned}$$

$K_s = I_s \cup \{ a_1^s w_q \}$

Die weiteren Erzeugenden und Relationen ergeben sich durch ähnliche Rechnungen.

Weiter folgt wie oben

Lemma 7: Alle Differentiale verschwinden.

Mit dem Analogon von Lemma 4 für die Homologie läßt sich nun die angegebene Modulstruktur von $\widetilde{bo}_*(X)$ über $\widetilde{bo}_*(S^0)$ wie folgt bestimmen.

Sei $m = 8c$, $n = 8d+4$, $c < d$. Dann folgt aus Lemma 6:

$$2^3 \, |\widetilde{bo}_{8d-1}(X)| = |\widetilde{bo}_{8d+3}(X)| = 2^{4(d-c)+3} ,$$

$$\beta : \widetilde{bo}_{8d-1}(X) \longrightarrow 8\,\widetilde{bo}_{8d+3}(X) ,$$

$$\gamma : \widetilde{bo}_{4i-1}(X) \longrightarrow 16\,\widetilde{bo}_{4i+7}(X) , \quad 2c+1 \leq i \leq 2d-1,$$

sind Isomorphismen.

Wählen wir nun einen beliebigen Erzeugenden r_{2d+1} von $\widetilde{bo}_{8d+3}(X)$ und definieren

$$r_{2d} := \beta^{-1}(8r_{2d+1}),$$

$$r_{i-1} := \gamma^{-1}(2\beta\, r_i), \quad 2c+2 \leq i \leq 2d ,$$

so folgen unter Verwendung von $\beta^2 = 4\gamma$, $\beta\gamma = \gamma\beta$ - vgl. Beweis von Satz 3 - die Relationen

$$r_{2d} = 2\beta\, r_{2d+1} ,$$

$$\beta\, r_{i-1} = 8r_i , \quad 2c+2 \leq i \leq 2d+1.$$

Ferner sei r'_{2c} das erzeugende Element von $\widetilde{bo}_{8c+1}(X) = Z_2$. Dann ergeben sich die übrigen Relationen unmittelbar aus Lemma 6.

Für die anderen Werte von n und m erhält man die Modulstruktur mit analogen Konstruktionen.

Damit ist Satz 4 bewiesen.

Literaturverzeichnis

[1] J.F. Adams, On the structure and applications of the Steenrod algebra, Comm. Math. Helv. 32, 180 - 214, (1958).

[2] - - - , Vector fields on spheres, Ann. Math. 75, 6 603 - 632, (1962).

[3] - - - , Stable homotopy and generalised homology, Chicago Lectures in Mathematics, University Press, 1974.

[4] P.E. Conner, L. Smith, On the complex bordism of finite complexes, IHES 37, 117 - 222, (1969)

[5] M. Fujii, K_0 - groups of projective spaces, Osaka Journal of Mathematics, Vol.4, 141 - 149,(1967).

[6] A. Liulevicius, Notes on homotopy of Thom spectra, Amer. J. Math. 86, 1 - 16, (1964).

[7] S. MacLane, Homology, Springer, Berlin-Heidelberg-New York 1963.

[8] M. Mahowald, On the order of the image of the J-homomorphism, Bull. Amer. Math. Soc. 76, 1310 - 1313, (1970).

[9] C.R.F. Maunder, The spectral sequence of an extraordinary cohomology theory, Proc. Cambridge Phil. Soc. 59, 567 - 574, (1963).

[10] J.W. Milnor, The Steenrod algebra and its dual, Ann. Math. 67, 150 - 171, (1958).

[11] - - - , On the cobordism ring Ω^* and a complex analogue, Part I, Amer. J. Math. 82, 505 - 521, (1960).

[12] - - - , J.C. Moore, On the structure of Hopf algebras, Ann. Math. 81, 211 - 264, (1965).

[13] R.E. Mosher, M.C. Tangora, Cohomology operations and applications in homotopy theory, Harper and Row, New York 1968

[14] R.M. Switzer, Algebraic topology,- homotopy and homology, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1975.

[15] E. Thomas, Homotopy classification of maps by cohomology homomorphisms, Trans. Amer. Math. Soc.111, 138 - 151, (1964).

[16] G.W. Whitehead, Generalized homology theories, Trans. Amer. Math. SOc. 102, 227 - 283, (1962).

Lebenslauf

Ich wurde am 27.11.1947 als Sohn des Maschinisten Franz Roiko und seiner Ehefrau Gertrud, geb. Stickelbruck, in Bad Bramstedt geboren. Mein Vater kam im März 1954 bei einem Schiffsunglück ums Leben. Ostern 1954 wurde ich in die evangelische Volksschule in Wattenscheid - Günnigfeld eingeschult, von der ich nach vier Jahren zum mathematisch-naturwissenschaftlichen Gymnasium in Wattenscheid wechselte. Dort legte ich im November 1966 die Reifeprüfung ab. Nach Ableistung des Wehrdienstes begann ich im Sommersemester 1968 in Göttingen das Studium der Mathematik. Am 6.7.1973 bestand ich die Diplomprüfung in Mathematik.